Lösung + Wertung

Mathematisches Institut
der Heinrich-Heine-Universität
Düsseldorf
Apl. Prof. Dr. Axel
Grünrock

WiSe 2019/20
31.03.2020

2. Klausur zu Analysis I

Allgemeine Hinweise: Als Hilfsmittel ist (ausser Kugelschreiber und Papier) lediglich ein beidseitig beschriebenes DIN A 4 Blatt mit Notizen zugelassen. Die Klausur ist auf den ausgeteilten Formularen zu bearbeiten, und nur diese sind abzugeben. Am Ende sind drei Bogen Schmierpapier angeheftet, sollte dies nicht ausreichen, können Sie noch eigenes benutzen, was aber nicht eingesammelt wird. Die Aufgabenverteilung ist die folgende:

A1 (Multiple Choice, bitte auf dem Blatt ankreuzen)	10 Punkte
A2 (Monotonie, Beschränktheit, Konvexität)	10 Punkte
A3 (Grenzwerte)	9 Punkte
A4 (unbestimmte Integrale)	8 Punkte
A5 (Konvergenz von Reihen)	12 Punkte
A6 (Mittelwertsatz und Anwendung)	7 Punkte
A7 (Limes Superior)	6 Punkte

Bei den Aufgaben 1 und 2 werden lediglich die (Teil-)Ergebnisse korrigiert. **Es empfiehlt sich also im besonderen Maße, Rechen- und Übertragungsfehler zu vermeiden.** Die Klausur gilt für Mathematiker mit 28 (von 62 erreichbaren) Punkten als bestanden, für Nebenfächler mit 22 Punkten. Viel Erfolg!

1. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen stets richtig oder im Allgemeinen falsch sind. Hier sind nur die Antworten "richtig", "falsch" oder Enthaltungen möglich. Bitte auf dem Aufgabenblatt ankreuzen!

(a) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und injektiv, so ist f streng monoton.

Antwort: richtig ⊗ falsch ○ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(ZWS)

(b) Die imaginäre Einheit i ist definiert als die eindeutig bestimmte Lösung $z \in \mathbb{C}$ der Gleichung $z^2 + 1 = 0$.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(Diese Gleichung hat in $\mathbb{C}$ zwei verschiedene Lösungen $z_\pm = \pm i$.)

(c) Ist $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und gleichmäßig stetig, so ist f' beschränkt.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

Bsp: $f : (0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = \sqrt{x}$

(d) Die Dezimalbruchentwicklung der Eulerschen Zahl e ist periodisch.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

(In diesem Fall wäre $e \in \mathbb{Q}$.)

(e) Ist $(a_n)_n$ eine reelle Zahlenfolge mit der Eigenschaft, dass für alle natürlichen Zahlen m gilt $\lim_{n\to\infty} a_{n+m} - a_n = 0$, so ist $(a_n)_n$ konvergent.

Antwort: richtig ○ falsch ⊗ Enthaltung ○ **(2/1/0 P.)**

Bsp. $a_n = \sqrt{n} \to \infty$. Aber $a_{n+m} - a_n = \dfrac{m}{\sqrt{n+m} + \sqrt{n}} \to 0$.

2. **(1+2+1+2+1+1+2=10 P.)** Für $x > 0$ sei

$$f(x) = \frac{2+3x}{1+x}.$$

(a) Berechnen Sie $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}\left(3(1+x) - (2+3x)\right) = \frac{1}{(1+x)^2}. \quad (1P.)$$

(b) Begründen Sie mit Ihrem Ergebnis zu (a), dass f injektiv ist.

$f'(x) > 0 \ \forall x > 0 \Rightarrow f$ ist auf $(0,\infty)$ streng monoton steigend (1P.) $\Rightarrow f$ ist injektiv (1P.)

(c) Nimmt die Funktion f auf $(0,\infty)$ ein Extremum an?

Nein (1P.) (Folgt aus (b).)

(d) Bestimmen Sie $a := \inf\{f(x) : x > 0\}$ und $b := \sup\{f(x) : x > 0\}$.

(Wg. der Monotonie gilt:) $a = \lim_{x \searrow 0} f(x) = 2$ (1P.)

$b = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}+3}{\frac{1}{x}+1} = 3$ (1P.)

(e) Berechnen Sie die Umkehrfunktion $f^{-1} : (a,b) \to (0,\infty)$.

$y = f(x) = \frac{2+3x}{1+x} \Leftrightarrow y(1+x) = 2+3x \Leftrightarrow y-2 = (3-y)x$

$\Leftrightarrow x = \frac{y-2}{3-y}$, also $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3-y} \left(= \frac{2-y}{y-3}\right)$ (1P.)

(f) Geben Sie die Definition der Konvexität einer Funktion $g : I \to \mathbb{R}$ an. (Dabei sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall.) $g : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex $:\Leftrightarrow$

Für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$ (1P.)

(g) Bestimmen Sie das größte Teilintervall $J \subset (0,\infty)$, auf dem f konkav ist.

$f''(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$ (1P.)

Da $f''(x) < 0 \ \forall x \in (0,\infty)$, ist f auf dem gesamten Intervall $(0,\infty)$ konkav. (1P.)

3. (2+3+4 = 9 P.) Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to 0} f(x)$ der nachstehenden Funktionen f:

(a) $f(x) = \dfrac{\sin^3(2x)}{x^3} = \left(\dfrac{\sin(2x)}{x}\right)^3$

Nun ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = \sin'(0) = \cos(0) = 1$, also $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2$ (1P.)

und aus der Stetigkeit von $t \mapsto t^3$ folgt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 8$. (1P.)

(b) $f(x) = \dfrac{\cos(3x) - 1}{\cos(2x) - 1}$. Zweifache Anwendung von l'Hospital

ergibt $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3\sin(3x)}{2\sin(2x)}$ (1P.)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9\cos(3x)}{4\cos(2x)}$ (1P.)

$= \dfrac{9}{4}$ (1P.)

(c) $f(x) = (\cos(x))^{\frac{1}{x^2}} = \exp\left(\frac{1}{x^2} \ln(\cos(x))\right)$. (1P.)

Limit $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2} \ln(\cos(x)) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\tan(x)}{2x}$ (1P.)

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-1-\tan^2(x)}{2} = -\dfrac{1}{2}$, (1P.)

wobei zweimal l'Hospital angewandt wurde.

Mit der Stetigkeit von exp folgt

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \exp(-\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. (1P.)

bereits ausreichend

4. **(4 × 2 = 8 P.)** Berechnen Sie die nachstehenden unbestimmten Integrale:

(a) $\int \frac{x}{x+1}dx \quad = \int \frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\, dx$ 1P.

$= x - \ln(|x+1|)$. 1P.

(b) $\int \underset{f}{x} \underset{g'}{\cos(x)}dx \quad = x \sin(x) - \int \sin(x)\, dx$

$= x \sin(x) + \cos(x)$ 2P.

(Wer erkennt, dass part. Int. zum Ziel führt, aber falsch rechnet, erhält 1P.)

(c) $f(x) = \int \frac{e^x}{1+e^x}dx \quad = \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\, dx$ für $\varphi(x) = 1 + e^x$ 1P.

$= \ln(1+e^x)$ 1P.

(„logarithmisches Integral")

(d) $\int \cos^3(x)\sin(x)dx \quad = - \int \varphi(x)^3 \cdot \varphi'(x)\, dx$ für $\varphi(x) = \cos(x)$ 1P.

$= -\frac{1}{4}\cos^4(x)$ 1P.

5. **(3+6+3 = 12 P.)** Untersuchen Sie die nachstehenden unendlichen Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz. Geben Sie dabei an, welche Konvergenzkriterien Sie verwenden.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!\,3^n}$. Mit $a_n = \frac{n^n}{n!\,3^n}$ haben wir

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\, n!\, 3^n}{(n+1)! \cdot n^n \cdot 3^{n+1}} = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} < 1. \quad 2P.$$

Mit dem Quotientenkrit. (½ P.) folgt die (absolute) Konvergenz der Reihe (½ P.)

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}$ Beh. konvergiert nach Leibniz (1P.), aber nicht abs. (1P.)

Bew.: Aus der Vorlesung bekannt ist: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty \curvearrowright \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$. (1)

Monotonie: $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}} \Longleftrightarrow ((n+1)!)^n \geq (n!)^{n+1}$

$\Longleftrightarrow (n+1)^n \geq n!$, was offensichtlich der Fall ist. (1P.)

(Damit sind die Voraussetzungen von Leibniz erfüllt.)

Wir zeigen: $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \geq \frac{1}{n} \Longleftarrow \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{n^n} \Longleftarrow n^n \geq n!$ (klar) (1P.)

Damit folgt die zweite Behauptung aus dem Majorantenkrit (½) und der Divergenz der harmonischen Reihe (½ P.)

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$ Beh.: Die Reihe ist divergent. 1P.

Zur Begründung verwenden wir den Verdichtungssatz, (½ P.) wonach $\sum a_n$ konvergiert $\Longleftrightarrow \sum 2^k a_{2^k}$ konvergiert. ($a_n \searrow 0$)

Hier: $a_n = \frac{1}{n \cdot \ln(n)} \Rightarrow 2^k \cdot a_{2^k} = \frac{2^k}{2^k \cdot \ln(2^k)} = \frac{1}{k \cdot \ln(2)}$ (1P.)

Die Behauptung folgt also aus der Divergenz der harmonischen Reihe. (½ P.)

6. **(2 + 3 + 2 = 7 P.)** Geben Sie den Mittelwertsatz (der Differenzialrechnung) genau an

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) diffbar. (1P.)

Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$ (1P.)

und beweisen Sie

(a) für $x > 0$ die Ungleichungen $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$.

Wir haben $\frac{d}{dx} \ln(1+x) = \frac{1}{1+x}$ (1P.)

Also existiert ein $\xi \in (0,x)$ mit $\ln(1+x)$

$= \ln(1+x) - \ln(1) = \frac{x}{1+\xi}$ (1P.)

Nun folgt aus $0 < \xi < x$, dass $\frac{1}{1+x} < \frac{1}{1+\xi} < 1$,

und Multiplikation mit $x > 0$ ergibt die Beh. (1P.)

(b) Gelten die Ungleichungen in (a) auch für $x \in (-1,0)$?

Ja. (1P.)

In diesem Fall ist $-1 < x < \xi < 0$ und daher

$\frac{1}{1+x} > \frac{1}{1+\xi} > 1$. Multiplikation mit $x<0$

ergibt $\frac{x}{1+x} < \frac{x}{1+\xi} = \ln(1+x) < x$. (1P.)

Bem. Alternativ kann man auch die Fktn. $f(x) = x - \ln(1+x)$ und $g(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$ untersuchen. Es ist $f(0) = g(0) = 0$, f und g sind streng monoton steigend auf $[0,\infty)$ und ebenso fallend auf $(-1,0]$, woraus sich ebenfalls die Ungleichungen ergeben.

7. **(6 P.)** Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beschränkte Folgen reeller Zahlen. Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n$,

falsch, Bsp. $a_n = (-1)^n$, $b_n = (-1)^{n+1}$. Dann ist $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = -1$, während rechts $+1$ herauskommt. (Beispiel angeben reicht!) (1P.)

(b) $\limsup_{n\to\infty}(a_n b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n \limsup_{n\to\infty} b_n$,

falsch, Bsp. $a_n = b_n = (-1, 0, -1, 0, \dots)$. Dann ist linke Seite $= 1$, rechte Seite $= 0$ (1P.)

(Dieses Bsp. ist natürlich auch für (a) geeignet.)

(c) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$,

falsch. Bsp. wie in (a) (1P.)

(d) $\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n$. Richtig! $\to$ 1P.

Sei $a^* = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n$, $b^* = \limsup\limits_{n\to\infty} b_n$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Dann existiert ein $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \ge N$ gilt: $a_n \le a^* + \frac{\varepsilon}{2}$ und $b_n \le b^* + \frac{\varepsilon}{2}$. Also ist für alle $n \ge N$: $\sup\{a_k + b_k : k \ge n\} \le a^* + b^* + \varepsilon$. Für $n \to \infty$: $\limsup\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) \le a^* + b^* + \varepsilon$. Gilt für beliebige $\varepsilon > 0$ und damit folgt: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n + b_n \le a^* + b^*$.

(Für den Bew.: 2P.)