6.5 Das uneigentliche Riemann-Integral

Bisher: Beschränkte Funktionen auf kompakten Integrationsbereich $[a,b]$

Jetzt: Unbeschränkte Funktionen auf beschränktem Integrationsgebiet

und: Hinreichend schnell fallende Funktionen auf unbeschränktem Integrationsintervall

Def. (uneigentliches Riemann-Integral):

(1) Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[a,\beta] \subset [a,b)$ integrierbar. Dann heißt f auf $[a,b)$ uneigentlich integrierbar, wenn der Grenzwert

$$\lim_{\substack{\beta \to b \\ a < \beta < b}} \int_a^\beta f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

(in $\mathbb{R}$) existiert.

(2) Es sei $-\infty \leq a < b < \infty$ und $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ auf jedem Intervall $[\alpha,b] \subset (a,b]$ integrierbar. Dann heißt f auf $(a,b]$ uneigentlich integrierbar, wenn

$$\lim_{\substack{\alpha \to a \\ a < \alpha < b}} \int_\alpha^b f(x)\,dx =: \int_a^b f(x)\,dx$$

(in $\mathbb{R}$) existiert.

(3) Sei $-\infty \leq a < b \leq \infty$. Dann heißt $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ uneigentlich integrierbar, falls ein $c \in (a,b)$ existiert, so daß f auf $(a,c]$ und auf $[c,b)$ uneigentlich integrierbar ist. In diesem Fall setzen wir

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Bsp.:

(1) $\int_1^\infty \frac{dx}{x^s}$ existiert genau dann, wenn $s > 1$ ist.

Bew.: Für $s \neq 1$ ist

$$\int_1^\beta \frac{dx}{x^s} = \frac{1}{1-s}\, x^{1-s} \Big|_1^\beta = \frac{1}{1-s}\left(\beta^{1-s} - 1\right),$$

also

$$\lim_{\beta\to\infty} \int_1^\beta \frac{dx}{x^s} = \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{1-s}\left(\beta^{1-s} - 1\right) = \begin{cases} \infty, & \text{für } s<1 \\ \frac{1}{s-1} & \text{für } s>1. \end{cases}$$

Für $s = 1$ haben wir

$$\int_1^\beta \frac{dx}{x} = \ln(\beta) \longrightarrow \infty \quad (\beta \to \infty),$$ also existiert auch dieses uneigentliche Integral nicht. $\square$

Dieselbe Familie von Funktionen soll jetzt auf dem Intervall $(0,1]$ untersucht werden.

(2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^s}$ existiert genau dann, wenn $s<1$ ist.

Bew.: Für $s \neq 1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \frac{x^{1-s}}{1-s}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-s}(1-\varepsilon^{1-s})$ $(\varepsilon>0)$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^s} = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{1-s}(1-\varepsilon^{1-s}) = \begin{cases} \infty & \text{für } s>1 \\ \frac{1}{1-s} & \text{für } s<1 \end{cases}$$

Für $s=1$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln(1) - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \searrow 0]{} \infty$. □

Weitere Beispiele ggf. im Tutorium.

Ein hinreichendes Kriterium für die Existenz (oder Konvergenz) eines uneigentlichen Integrals liefert der

Satz 1 (Majorantenkriterium) Es sei $-\infty < a < b \leq \infty$ und $f: [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so daß gilt:

(i) f ist auf $[a,\beta]$ integrierbar für jedes $\beta \in (a,b)$,

(ii) es existiert eine uneigentlich integrierbare Funktion $g: [a,b) \to \mathbb{R}$, so daß $|f| \leq g$.

Dann ist auch f auf $[a,b)$ uneigentlich integrierbar.

Bew.: Nach (i) ist $I_n := \int_a^{\beta_n} f(x)\,dx$ wohldefiniert für jedes $\beta_n \in [a,b)$. Gilt $\lim_{n\to\infty} \beta_n = b$, so erhalten wir:

$$|I_n - I_m| = \left| \int_{\beta_m}^{\beta_n} f(x)\,dx \right| \leq \int_{\beta_m}^{\beta_n} g(x)\,dx \longrightarrow 0 \quad (n,m \to \infty)$$

Also ist $(I_n)_n$ eine Cauchy-Folge reeller Zahlen und somit konvergent. □

Das Majorantenkriterium ist ein hinreichendes, aber keineswegs notwendiges Kriterium, wie das folgende Bsp. zeigt:

Bsp. 1 $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\,dx$ existiert, hingegen existiert $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$ nicht.

Beweis: $\int\limits_{\pi}^{R} \frac{\sin(x)}{x}\,dx = -\frac{\cos(x)}{x}\Big|_{\pi}^{R} - \int\limits_{\pi}^{R} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$

$= \frac{1}{\pi} - \frac{\cos(R)}{R} - \int\limits_{\pi}^{R} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$. Dabei ist

$\lim\limits_{R\to\infty} \frac{\cos(R)}{R} = 0$ und auch der Grenzwert

$\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{\pi}^{R} \frac{\cos(x)}{x^2}\,dx$ existiert nach Satz 1, denn

$\left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, vgl. Bsp. (1).

Hingegen ist $\int\limits_{\pi}^{\infty} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \int\limits_{\pi}^{N\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx$

$= \sum\limits_{k=1}^{N-1} \int\limits_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(x)|}{x}\,dx \geq \sum\limits_{k=1}^{N-1} \frac{1}{\pi(k+1)} \cdot \int\limits_{0}^{\pi} \sin(x)\,dx$

$= \frac{2}{\pi} \cdot \sum\limits_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k+1} \longrightarrow \infty \quad (N \to \infty)$.

Damit ist auch die zweite Aussage gezeigt.

Satz 2 (Integralvergleichskriterium für Reihen):

Es sei $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}_0^+$ monoton fallend. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) \text{ konvergiert} \iff \int_1^{\infty} f(x)\,dx \text{ existiert.}$$

Bew.: Zur Anwendung des Majorantenkriteriums definieren wir die Funktionen

$$g(x) := f(k) \quad \text{für} \quad x \in [k-1, k), \quad k = 2, 3, \ldots \quad \text{und}$$

$$h(x) := f(k-1) \quad \text{"} \quad \text{"} \quad , \quad \text{—"—} .$$

Dann ist $g(x) \le f(x) \le h(x)$ und wir haben

$$\int_1^{\infty} g(x)\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} g(x)\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} f(k)$$

sowie

$$\int_1^{\infty} h(x)\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} \int_{k-1}^{k} h(x)\,dx = \sum_{k=2}^{\infty} f(k-1) = \sum_{k=1}^{\infty} f(k).$$

Das bedeutet: $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergiert $\Rightarrow \int_1^{\infty} h(x)\,dx$ existiert $\underset{M.}{\Rightarrow} \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ existiert $\underset{M}{\Rightarrow} \int_1^{\infty} g(x)\,dx$ ex. $\Rightarrow \sum_{k=2}^{\infty} f(k)$ konvergiert. $\square$

<u>Anwendung</u>: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)^s} < \infty \iff s > 1$, denn

$$\int_2^R \frac{dx}{x \cdot \ln(x)^s} = \int \frac{1}{y^s(x)} \cdot y'(x)\,dx = \int_{\ln(2)}^{\ln(R)} y^{-s}\,dy.$$

$y = \ln(x)$

Jetzt Bsp. 1 und Satz 2!