

Aufgrund des Hauptsatzes liefert uns jede Ableitungsregel eine Regel bzw. eine Methode der Integration. Z.B. erhalten wir durch Integration der Produktregel:

Satz 1 (partielle Integration): Seien $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig d'bar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

(Hierbei $f(x)g(x) \Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a)$.)

Bew.: Aufgrund der Produktregel

$$(f \cdot g)' = f'g + fg'$$

haben wir

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = \int_a^b (f \cdot g)'(x) dx - \int_a^b f'(x)g(x) dx$$

$$\stackrel{\text{Hauptsatz}}{=} f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx. \quad \square$$

$$\text{Bsp. (1)} \quad \int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = (x-1)e^x$$

Mit diesem Ergebnis können wir das Argument wiederholen und erhalten

$$\int x^2 \cdot e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x$$

Durch Iteration findet man heraus:

$$\int x^u e^x dx = e^x \cdot \sum_{k=0}^u (-1)^{u-k} \cdot \frac{u!}{k!} x^k$$

6.21

Dies läßt sich induktiv jetzt mit einer weiteren partiellen Integration beweisen:

$$u \rightarrow u+1: \int x^{u+1} e^x dx \stackrel{\text{part. Int.}}{=} x^{u+1} e^x - (u+1) \cdot \int x^u \cdot e^x dx$$

$$\stackrel{i.V.}{=} x^{u+1} e^x - (u+1) \cdot e^x \sum_{k=0}^u (-1)^{u-k} \cdot \frac{u!}{k!} \cdot x^k$$

$$= x^{u+1} \cdot e^x + e^x \cdot \sum_{k=0}^u (-1)^{u+1-k} \frac{(u+1)!}{k!} x^k$$

$$= e^x \cdot \sum_{k=0}^{u+1} (-1)^{u+1-k} \cdot \frac{(u+1)!}{k!} x^k$$

Nimmt man die Linearität des Integrals hinzu, ist auf diese Weise für jedes Polynom $P(x) = \sum_{u=0}^N a_u x^u$ das Integral $\int P(x) e^x dx$ im Prinzip berechenbar. In ähnlicher Weise lassen sich auch die Integrale

$$\int P(x) \sin(x) dx \quad \text{und} \quad \int P(x) \cos(x) dx$$

(P wie oben) behandeln. Wesentlich hierfür ist, daß man alle Stammfunktionen des zweiten Faktors kennt und dabei eine regelmäßige Wiederholung auftritt

$$(2) \int \sin^2(x) dx = \int \underbrace{\sin(x)}_{f'} \cdot \underbrace{\sin(x)}_g dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin(x) + \int \cos^2(x) dx$$

Pythagoras

$$= -\cos(x) \sin(x) + x - \int \sin^2(x) dx$$

$$\Rightarrow \int \sin^2(x) dx = \frac{1}{2} (x - \cos(x) \sin(x))$$

By product: $\int \cos^2(x) dx = x - \int \sin^2(x) dx$

$$= \frac{1}{2} (x + \cos(x) \sin(x))$$

Auch dieses Argument ist verallgemeinerbar!

Für $I_u(x) = \int \sin^u(x) dx$ haben wir

$$I_u(x) = \int \underbrace{\sin(x)}_{f'} \cdot \underbrace{\sin^{u-1}(x)}_g dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin^{u-1}(x) + (u-1) \cdot \int \cos^2(x) \cdot \sin^{u-2}(x) dx$$

$$= -\cos(x) \cdot \sin^{u-1}(x) + (u-1) \cdot I_{u-2}(x) - (u-1) I_u(x)$$

Also: $I_u(x) = \frac{1}{u} ((u-1) I_{u-2}(x) - \cos(x) \sin^{u-1}(x))$

Da $I_0(x) = x$ und $I_2(x) = \int \sin(x) dx = -\cos(x)$

bekannt sind, lässt sich mit dieser Rekursionsformel im Prinzip $I_u(x)$ für jedes $u \in \mathbb{N}$ berechnen, und zwar ohne jegliche weitere Integrationen.

$$(3) \int \ln(x) dx = \int 1 \cdot \ln(x) dx = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \ln'(x) dx \\ = x \cdot \ln(x) - \int 0 dx = x \cdot (\ln(x) - 1) \quad \text{€23}$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die Integrale

$$\int \arctan(x) dx \quad \text{und} \quad \int \arcsin(x) dx$$

berechnen, was zur Übung empfohlen sei.

Satz 2 (Substitutionsregel): Es sei $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig

und $\varphi: [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ stetig d'bar. Dann gilt

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Bew.: Sei F eine Stammfunktion von f . Dann ist

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

$$\xrightarrow{\text{Hauptsatz}} \int_a^b (F \circ \varphi)'(x) dx$$

$$\xrightarrow{\text{Kettenregel}} \int_a^b f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx. \quad \square$$

Bem.: Als unbestimmtes Integral: $\int f(t) dt \Big|_{t=\varphi(x)}$

$$= \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Rsp.:

$$(1) \int_a^b f(cx+d) dx = \frac{1}{c} \int_a^b \underbrace{f(cx+d)}_{\varphi(x)} \cdot \underbrace{c}_{\varphi'(x)} dx$$

$$= \frac{1}{c} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t) dt = \frac{1}{c} \int_{ca+d}^{cb+d} f(t) dt$$

Anderes ausgedrückt: Ist $g(x) = f(cx+d)$ und F eine Stammfunktion von f , so ist $G(x) = \frac{1}{c} \cdot F(cx+d)$ eine Stammfunktion von g .

Konkretisierung: $\int e^{cx} dx = \frac{1}{c} e^{cx}$; $\int \cos(cx) dx = \frac{1}{c} \sin(cx)$

$$\int a^x dx = \int \exp(x \cdot \ln(a)) dx = \frac{1}{\ln(a)} \exp(x \cdot \ln(a)) = \frac{a^x}{\ln(a)}$$

(hierbei $a > 0$)

$$(2) \int_a^b \ln(x) \frac{dx}{x} = \int_a^b \ln(x) \cdot \ln'(x) dx = \int_{\ln(a)}^{\ln(b)} t dt$$

$$= \frac{1}{2} (\ln(b)^2 - \ln(a)^2)$$

bzw. als unbestimmtes Integral: $\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \ln(x)^2$

$$(3) \int_a^b \sin^u(x) \cos(x) dx = \int_{\sin(a)}^{\sin(b)} t^u dt = \frac{1}{u+1} (\sin(b)^{u+1} - \sin(a)^{u+1})$$

bzw. $\int \sin^u(x) \cos(x) dx = \frac{1}{u+1} \sin^{u+1}(x)$

(4) das sog. logarithmische Integral: Falls $\varphi(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$

$$\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{dt}{t} = \ln(|\varphi(b)|) - \ln(|\varphi(a)|)$$

$$= \ln\left(\left|\frac{\varphi(b)}{\varphi(a)}\right|\right) \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx = \ln(|\varphi(x)|)$$

Konkret: $\int \tan(x) dx = - \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = - \ln(|\cos(x)|)$

(5) Kreisfläche (Radius 1):

$$F = 2 \cdot \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} dt = 4 \cdot \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \quad (\text{Symmetrie})$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2(x)} \cdot \cos(x) dx \quad \varphi(x) = \sin(x)$$

$$= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx$$

Nun ist $\int \cos^2(x) dx = \int \underbrace{\cos(x)}_f \cdot \underbrace{\cos(x)}_{g'} dx = \cos(x) \sin(x)$

$$+ \int \sin^2(x) dx = \underbrace{\cos(x)\sin(x)}_+ x - \int \cos^2(x) dx \quad (\text{part. Int.})$$

$$\Rightarrow \int \cos^2(x) dx = \frac{1}{2} (x + \cos(x)\sin(x))$$

$$\Rightarrow \int_0^{\pi/2} \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{4} \Rightarrow F = \pi$$

Da wir π definiert haben, indem wir die kleinste positive Nullstelle von $\cos \frac{\pi}{2}$ genannt haben, ist dies tatsächlich nicht trivial.