Der Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Dieser Satz stellt den Zusammenhang her zwischen Integration und Differentiation. Er sagt aus, daß unter bestimmten Voraussetzungen Ableitung und Integration zueinander inverse Operationen sind. Es werden zwei Formulierungen des Hauptsatzes gegeben:

Satz 1 (Hauptsatz, 1. Version): Es sei $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit integrierbarer Ableitung F'. Dann gilt

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Bew.: Für eine ausgezeichnete Zerlegungsfolge (Z_n) mit $Z_n = \{x_0^{(n)}, \dots, x_{p_n}^{(n)}\}$ schreiben wir die Differenz $F(b) - F(a)$ als Teleskopsumme:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{p} F(x_k^{(n)}) - F(x_{k-1}^{(n)})$$

$$\overset{\text{MWS}}{=} \sum_{k=1}^{p} F'(\xi_k^{(n)})\,(x_k^{(n)} - x_{k-1}^{(n)}) \quad \text{mit } \xi_k^{(n)} \in [x_{k-1}^{(n)}, x_k^{(n)}]$$

$$\xrightarrow[\delta(Z_n)\to 0]{} \int_a^b F'(x)\,dx, \text{ da } F' \text{ auf } [a,b] \text{ integrierbar ist.} \qquad \square$$

Bei der zweiten Formulierung des Hauptsatzes betrachtet man das Integral als Funktion der oberen Integrationsgrenze, also

$$x \mapsto F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a,b])$$

für eine integrierbare Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Daß dies stets definiert ist, zeigt das folgende

Lemma 1: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $x \in (a,b)$. Dann ist f auch auf $[a,x]$ und auf $[x,b]$ integrierbar, und es gilt

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt .$$

Bew.: Zu $\varepsilon > 0$ ex. eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$ von $[a,b]$ mit $x = x_q$ für ein $q \in \{1, \dots, p-1\}$ und $S(f,Z) - s(f,Z) < \varepsilon$ (Integrierbarkeitskrit.). Dann sind

$$Z' := \{x_0, \dots, x_q\} \quad \text{und} \quad Z'' := \{x_q, \dots, x_p\}$$

Zerlegungen von $[a,x]$ bzw. von $[x,b]$, und es gilt

$$S(f,Z') - s(f,Z') < \varepsilon \quad \text{sowie} \quad S(f,Z'') - s(f,Z'') < \varepsilon .$$

Das zeigt die Integrierbarkeitsaussage. Ferner gilt

$$S(f,Z) = S(f,Z') + S(f,Z'')$$

für alle solchen Zerlegungen. Für $\delta(Z) \to 0$ ($\Leftarrow \delta(Z') \to 0$ und $\delta(Z'') \to 0$) bleibt diese Identität erhalten und führt auf

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^b f(t)\,dt . \qquad \square$$

Konvention: Für $b<a$ setzt man $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

Dann gilt die Identität in Lemma 1 auch ohne die Voraussetzung $a<x<b$, sofern die Integrierbarkeit von f gegeben ist.

Satz 2 (Hauptsatz, 2. Version): Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ für $x\in[a,b]$. Dann ist F in $[a,b]$ differenzierbar und es gilt $F'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$.

Bew.: Nach dem MWS der Integralrechnung existiert ein $\xi\in[x,x+h]$ (oder $[x+h,x]$, falls $h<0$ ist), so daß

$$F(x+h)-F(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi)\cdot h.$$

$$\Rightarrow \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(F(x+h)-F(x)\right) = \lim_{h\to 0} f(\xi) = f(x). \quad \square$$

Def (Stammfunktion): Ist $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $F:I\to\mathbb{R}$ diffbar mit $F'(x)=f(x)\ \forall x\in I$, so heißt F eine Stammfunktion von f bzw. das unbestimmte Integral von f. Schreibweise: $F(x)=\int f(x)\,dx$.

Bem.: (1) Sind F und G Stammfktn. einer Funktion f, so ist $F-G$ konstant. Die Umkehrung gilt auch: Ist F eine Stammfunktion von f und $G=F+c$, so ist auch G eine Stammfunktion von f.

(2) Nach Satz 1 gilt: Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar und Stammfunktion F, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a)$

Weitere Schreibweisen: $F(b)-F(a) = F(x)\Big|_a^b = \left[F(x)\right]_a^b$.

(3) Satz 2 lautet: Zu jeder stetigen Funktion $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ist mit $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion gegeben. Die Stetigkeitsvoraussetzung in Satz 2 ist wesentlich!

<u>Bsp.</u> (für Stammfunktionen / unbestimmte Integrale):

		Funktionen	Intervalle
(1)	Potenzen	$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$, falls $n\in\mathbb{N}_0$; $(-\infty,0)$ und $(0,\infty)$, falls $n\in\mathbb{Z}$, $n\le -2$
		$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$(0,\infty)$ für $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$
		$\int \frac{dx}{x} = \ln(\lvert x\rvert)$	$(-\infty,0)$ oder $(0,\infty)$
(2)	exp- + Hyperbel	$\int \exp(x)\,dx = \exp(x)$	$\mathbb{R}$
		$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x)$	
		$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x)$	
(3)	Trigonometrische Fktn.	$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
		$\int \cos(x)\,dx = \sin(x)$	
		$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$
		$\int \frac{dx}{\sin^2(x)} = -\cot(x)$	$(0,\pi)$

6.19
(a)

(4) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x)$ $(-1,1)$

Arcus-Fkten

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x)$ $\mathbb{R}$