6.2 Integrierbarkeitskriterium und Anwendungen

Satz 1: Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann sind äquivalent:

(a) f ist integrierbar,

(b) zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. eine Zerlegung Z_ε von $[a,b]$, so daß

$$S(f, Z_\varepsilon) - s(f, Z_\varepsilon) < \varepsilon,$$

(c) zu jedem $\varepsilon > 0$ ex. Z_ε, so daß $\quad (Z_\varepsilon = \{x_0, \dots, x_p\})$

$$\sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x) - f(y)| : x_{k-1} \le x, y \le x_k\}(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon.$$

Bew.: $\quad$ (a) $\Rightarrow$ (b): Ist f integrierbar, so gilt für jede Zerlegungsnullfolge (Z_n)

$$\lim_{n\to\infty} s(f, Z_n) = \lim_{n\to\infty} S(f, Z_n) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

also insbes. $\lim\limits_{n\to\infty} S(f, Z_n) - s(f, Z_n) = 0$. Zu $\varepsilon > 0$ ex. also $n = n(\varepsilon)$ mit $S(f, Z_n) - s(f, Z_n) < \varepsilon$. $\Rightarrow$ (b)

(b) $\Rightarrow$ (a): Aus (b) folgt: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists Z_\varepsilon$, so daß

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le S(f, Z_\varepsilon) - s(f, Z_\varepsilon) < \varepsilon,$$

also $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, d. h. (a).

(b) $\Leftrightarrow$ (c): Für eine beliebige Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$ ist

$$S(f,Z) - s(f,Z) = \sum_{k=1}^{p} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \left(\sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\} - \inf\{f(y) : x_{k-1} \le y \le x_k\}\right)(x_k - x_{k-1})$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x) - f(y)| : x_{k-1} \le x, y \le x_k\}(x_k - x_{k-1}),$$

denn für eine beliebige beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ gilt:

$$\sup A - \inf A = \sup A + \sup(-A)$$

$$= \sup(A-A) = \sup\{a-a' : a,a' \in A\}$$

$$= \sup\{|a-a'| : a,a' \in A\}. \qquad \square$$

Satz 2: Es sei $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ stetig oder monoton, so ist f integrierbar.

Bew.: (1) Wenn f stetig ist, ist f glm. stetig. Zu $\varepsilon > 0$ existiert also ein $\delta > 0$, so daß $\forall x,y \in [a,b]$ mit $|x-y| < \delta$ gilt, daß

$$|f(x)-f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Ist dann Z eine Zerlegung mit $\delta(Z) < \delta$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x)-f(y)| : x_{k-1} \le x,y \le x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

$$\le \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{k=1}^{p}(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon. \quad (\text{dabei } Z = \{x_0, \dots, x_p\})$$

(2) Für monoton steigendes f (o.B.d.A.) wählen wir eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_p\}$ mit $\delta(Z) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$.

Dann ist $S(f,Z) - s(f,Z) = \sum_{k=1}^{p}(f(x_k)-f(x_{k-1}))\cdot(x_k - x_{k-1})$

$$\le \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)} \cdot \sum_{k=1}^{p} f(x_k) - f(x_{k-1}) = \varepsilon. \qquad \square$$

Mit Satz 2 sind zwei wichtige Klassen integrierbarer Funktionen bekannt. Noch wissen wir aber nicht, ob z.B. das Produkt oder der Quotient zweier integrierbarer Funktionen wieder integrierbar ist. Den Schlüssel dazu liefert das folgende

Lemma 1: Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und $\phi : f([a,b]) \to \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig, so ist auch $\phi \circ f$ integrierbar.

Bew.: N.V. ex. $L > 0$ so daß $|\phi(\xi) - \phi(\eta)| \leq L(\xi - \eta)$ für alle $\xi, \eta \in f([a,b])$. Ist nun $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so existiert zu $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{L}$ eine Zerlegung $Z_{\varepsilon'} = \{x_0, \dots, x_p\}$ von $[a,b]$, so daß

$$\sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x) - f(y)| : x_{k-1} \leq x, y \leq x_k\}(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon'$$

(Satz 1). Hieraus folgt wg. $|\phi(f(x)) - \phi(f(y))| \leq L|f(x) - f(y)|$, daß

$$\sum_{k=1}^{p} \sup\{|\phi(f(x)) - \phi(f(y))| : x_{k-1} \leq x, y \leq x_k\}(x_k - x_{k-1})$$

$$\leq L \cdot \sum_{k=1}^{p} \sup\{|f(x) - f(y)| : x_{k-1} \leq x, y \leq x_k\}(x_k - x_{k-1}) < \varepsilon.$$

Also ist – wieder nach Satz 1 – $\phi \circ f$ integrierbar.

$\square$

Folgerungen:

(1) Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, so sind auch $|f|$, $f_+ = \max(f,0)$, $f_- = \max(-f,0)$ und f^2 integrierbar. Gilt für ein $\delta>0$, daß $|f(x)|\geq\delta$ $\forall x\in[a,b]$, so ist auch $\frac{1}{f}$ integrierbar.

(2) Sind $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrierbar, so sind auch $f\cdot g$, $\max(f,g)$ und $\min(f,g)$ integrierbar.

Bew.: (1) Die Funktionen $x\mapsto|x|$, $x\mapsto x_\pm$ sind auf $\mathbb{R}$, $x\mapsto x^2$ auf $f([a,b])$ Lipschitz-stetig. Ferner ist $x\mapsto\frac{1}{x}$ auf $[\delta,\infty)$ Lipschitz, denn

$$\left|\frac{d}{dx}\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{x^2} \leq \frac{1}{\delta^2}.$$

(2) $$f\cdot g = \frac{1}{4}\left\{(f+g)^2-(f-g)^2\right\}$$

$$\max(f,g) = f+(g-f)_+$$

$$\min(f,g) = f-(f-g)_+ \qquad \square$$

Mit der Integrierbarkeit von $|f|$ erhalten wir die folgende Dreiecksungleichung für Integrale aus der Monotonie des Integrals:

Lemma 2: Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gilt

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Bew.: Sowohl $-f(x) \leq |f(x)|$ als auch $f(x) \leq |f(x)|$. □

Ebenfalls aus der Monotonie des Integrals ergibt sich der folgende

Satz 3 (Mittelwertsatz der Integralrechnung): Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $g(x) \geq 0$ und $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in [a,b]$. Dann gilt

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx.$$

Ist f stetig, so existiert ein $\xi \in [a,b]$, so daß

$$f(\xi) \cdot \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)g(x)\,dx.$$

Beweis: Wir haben $m\,g(x) \leq f(x)g(x) \leq M\,g(x)$, die Ungleichungskette folgt also aus der Monotonie des Integrals. Wenn f stetig ist, wählen wir $m = \min\{f(x) : x \in [a,b]\}$, $M = \max\{f(x) : x \in [a,b]\}$ und wenden den ZWS an auf die Abb.

$$x \longmapsto f(x) \cdot \int_a^b g(t)\,dt.$$ □

Bem.: Für stetiges f gilt insbes. $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a)$.
(Wähle $g \equiv 1$ in Satz 3!)