Bsp.: <u>Binomialreihe</u> = Taylorreihe der Funktion

$$f_\alpha : [-1,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f_\alpha(x) := (1+x)^\alpha$$

mit Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(Newton, 1664/65, zum Vergleich: Brook Taylor lebte von 1685–1731.)

<u>Bekannt</u> sind:

- der binomische Lehrsatz: $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k$

  mit $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha!}{(\alpha-k)! \cdot k!}$ $(0 \leq k \leq \alpha$, sonst $=0)$, gilt für $x \in \mathbb{R}$,
- die geometrische Reihe: $(1+x)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$,

  konvergiert für $|x| < 1$ absolut gegen f_{-1}, divergiert für $|x| = 1$.

1. <u>Berechnung der Ableitungen von f_α</u>

$$f_\alpha'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}, \quad f_\alpha''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}, \ldots$$

allgemein: $f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+1-n)(1+x)^{\alpha-n}$,

insbesondere $f_\alpha^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \cdot \ldots \cdot (\alpha+1-n) = \prod_{k=1}^{n} \alpha+1-k$

Im Hinblick auf f die Koeffizienten $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ der Taylorreihe führt man die verallgemeinerten Binomialkoeffizienten $\binom{\alpha}{n} := \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha+1-k}{k}$ ein,

so dass $$Tf_\alpha(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n.$$

Für welche $x \in [-1,1]$ konvergiert $Tf_\alpha(x,0)$? Ist die Konvergenz absolut? Ist die Grenzfunktion f_α?
Zur Beantwortung dieser Fragen benötigen wir eine

i. Abschätzung der Größenordnung von $\binom{\alpha}{n}$:

Lemma 8.1: Für $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ existiert

$$\lim_{n \to \infty} n^{1+\alpha} \left| \binom{\alpha}{n} \right| \in (0, \infty).$$

Insbesondere existieren Konstanten $C_\alpha \geq \varepsilon_\alpha > 0$, so dass

$$\varepsilon_\alpha n^{-(1+\alpha)} \leq \left| \binom{\alpha}{n} \right| \leq C_\alpha \cdot n^{-(1+\alpha)}.$$

Bem.: Klar für $\alpha = -1$, denn $\binom{-1}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1-1-k}{k} = (-1)^n$, was der geometrischen Reihe entspricht.

Bew.: Schritt 1: Für $\alpha \in (-1,0)$. Wir setzen $a_n = n^{1+\alpha} \left| \binom{\alpha}{n} \right|$ wegen

$$\binom{\alpha}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\alpha+1-k}{k} = (-1)^n \cdot \prod_{k=1}^{n} \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right)}_{>0, \text{ da } \alpha < 0}$$

ist dann

$$a_n = n^{1+\alpha} \cdot \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{\alpha+1}{k}\right)$$

und daher

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{\alpha+1}}{n^{\alpha+1}} \cdot \left(1 - \frac{\alpha+1}{n+1}\right) \overset{(!)}{>} 1$$

denn $(!) \iff (n+1)^{\alpha+1} - (\alpha+1)(n+1)^{\alpha} > n^{\alpha+1}$

$$\iff (n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} > (\alpha+1)(n+1)^{\alpha}$$

und letztes folgt aus dem MWS, angewendet auf $g(t) = t^{\alpha+1}$: $(n+1)^{\alpha+1} - n^{\alpha+1} = (\alpha+1)\xi^{\alpha} > (\alpha+1)(n+1)^{\alpha}$ mit $\xi \in (n, n+1)$ und $\alpha < 0$.

Also ist a_n streng monoton steigend und es gilt

$$a_n \geq a_1 = \left|\binom{\alpha}{1}\right| = \left|\frac{\alpha+1-1}{1}\right| = -\alpha \quad (>0\,!)$$

Andererseits: $\ln(a_n) = \ln\left(n^{\alpha+1} \cdot \prod_{k=1}^{n}\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)\right)$

$$= (\alpha+1)\cdot\ln(n) + \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1-\frac{\alpha+1}{k}\right)$$

jetzt: Teleskop und $\ln(1+x) \leq x$

$$\leq (\alpha+1)\cdot\Bigg(\sum_{k=2}^{n} \underbrace{\ln(k)-\ln(k-1)}_{\text{MWS } = \frac{1}{\xi} \leq \frac{1}{k-1} \text{ mit } \xi \in \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k-1}\right)} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\Bigg)$$

$$\leq (\alpha+1)\cdot\left(\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right) - 1\right) \leq 0.$$

Da ln monoton steigt, also insgesamt $-\alpha \leq a_n \leq 1$.

Aus Monotonie und Beschränktheit folgt die Existenz des Grenzwerts $\lim_{n\to\infty} a_n \geq -\alpha$.

Schritt 2: $\binom{\alpha+1}{n} = \frac{(\alpha+1)\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha+2-n)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n}$

$$= \frac{\alpha+1}{\alpha+1-n}\cdot\binom{\alpha}{n} \Longrightarrow n^{\alpha+2}\cdot\left|\binom{\alpha+1}{n}\right| = (\alpha+1)\cdot\underbrace{\frac{n}{n-(\alpha+1)}}_{\to 1\ (n\to\infty)}\cdot n^{\alpha+1}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} n^{\alpha+2}\left|\binom{\alpha+1}{n}\right| = (\alpha+1)\cdot\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1}\left|\binom{\alpha}{n}\right|$$

Existiert der Grenzwert auf der rechten Seite, so auch der jeweilige links, so erreicht man alle Intervalle $\alpha \in (k, k+1)$, $k \in \mathbb{N}_0$. Für $\alpha \neq -1$ gilt aber auch

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+1}\left|\binom{\alpha}{n}\right| = \frac{1}{\alpha+1}\lim_{n\to\infty} n^{\alpha+2}\left|\binom{\alpha+1}{n}\right|,$$

und wir können von $\alpha+1 \to \alpha$ schließen bzw. von $\alpha \in [-1,0)$ auf $\alpha-1$, $\alpha-2$ usw. $\square$

3. Folgerungen für die Konvergenz der Binomialreihe

1. Ist $\alpha > 0$ und $|x| \leq 1$, so ist $|x|^n |\binom{\alpha}{n}| \leq C_\alpha n^{-1-\alpha}$, und die Binomialreihe konvergiert absolut.

2. Ist $-1 < \alpha < 0$ und

2.1 $|x| < 1$, so konvergiert die Reihe ebenfalls absolut, da $|x|^n \cdot |\binom{\alpha}{n}| \leq C_\alpha |x|^n \cdot n^{-(1+\alpha)}$

2.2 $x = -1$, so divergiert die Reihe, da bei diesem Fall $x^n \cdot \binom{\alpha}{n} = |\binom{\alpha}{n}| \sim n^{-(1+\alpha)}$ Bew. des Lemmas, Schritt 1

2.3 $x = 1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{\alpha+1}{k})$ konvergiert nach Leibniz, aber nicht absolut.

3. Ist $\alpha \leq -1$ und $|x| < 1$, so konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ absolut. Für $|x| = 1$ (und $\alpha \leq -1$) divergiert die Reihe, da $(\binom{\alpha}{n} (\pm 1)^n)_n$ keine Nullfolge bildet.

4. Restgliedabschätzungen In allen Fällen, in denen die Binomialreihe konvergiert, konvergiert sie gegen f_α. Um dies einzusehen, zeigen wir, dass

$$0 = \lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x, x_0, \xi) = \lim_{n\to\infty} \frac{g(x) - g(x_0)}{g'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n,$$

woraus mit der Taylor-Formel die Behauptung folgt. Hierzu verwenden wir verschiedene Darstellungen des Restglieds, die sich durch passende Wahl der Funktion g ergeben. Stets ist $x_0 = 0$, $x \in [-1, 1]$ und $0 < |\xi| < |x|$ sowie

$$R_{n+1}(x,x_0;\xi) = \frac{g(x)-g(0)}{g'(\xi)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} \cdot (x-\xi)^n$$

$$\text{hier} = \frac{g(x)-g(0)}{g'(\xi)} \cdot (n+1) \cdot \binom{\alpha}{n} (1+\xi)^{\alpha-1-n} \cdot (x-\xi)^n$$

<u>Fall 1</u>: $|x|<1$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$ beliebig. Wir wählen $g(t)=x-t$,

so dass $\frac{g(x)-g(0)}{g'(\xi)} = x$ und damit

Cauchy-Form des Restglieds

$$R_{n+1}(x,0;\xi) = x\,(n+1)\binom{\alpha}{n}\frac{(x-\xi)^n}{(1+\xi)^n}\cdot(1+\xi)^{\alpha-1}.$$

Schreiben wir $\xi = x\cdot\vartheta$ mit einem $\vartheta \in (0,1)$, sehen

wir $\left|\frac{x-\xi}{1+\xi}\right| = |x| \left|\frac{1-\vartheta}{1+x\vartheta}\right| \le |x|$ (da $1-\vartheta < 1+x\vartheta$!),

so dass mit Lemma B1:

$$R_{n+1}(x,0;\xi) \le C_\alpha\, |x|^{n+1}\cdot n^{-\alpha}\,(1-|x|)^{\alpha-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

<u>Fall 2</u>: $x=1$, $\alpha>-1$. Mit der Lagrange-Form

$$R_{n+1}(x,0,\xi) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-\xi)^n \overset{\text{hier}}{=} \binom{\alpha}{n+1}\cdot(1+\xi)^{\alpha-1-n}(x-\xi)$$

haben wir wegen $0<\xi<x=1$

$$|R_{n+1}(x,0,\xi)| \le \left|\binom{\alpha}{n+1}\right| \overset{\text{Lemma B1}}{\le} C_\alpha\, n^{-(1+\alpha)} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} 0 \quad (\alpha>-1).$$

Fall 3: $x=-1$, $\alpha>0$. Wir wählen $g(t)=(t-\underset{\underset{-1}{\parallel}}{x})^{\alpha}$. ⑥

In diesem Fall wird

$$g\,\frac{g(x)-g(0)}{g'(\xi)} = \frac{-1}{\alpha(\xi-x)^{\alpha-1}} \overset{x=-1}{=} -\frac{(\xi+1)^{\alpha-1}}{\alpha}$$

und also

$$R_{n+1}(x,0,\xi) = -\frac{(\xi+1)^{1-\alpha}}{\alpha}(n+1)\binom{\alpha}{n+1}\frac{1}{(1+\xi)^{n+1-\alpha}}(-1-\xi)^{n}$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot(n+1)\binom{\alpha}{n+1}$$

$$\Rightarrow |R_{n+1}(x,0,\xi)| \leq C_\alpha\cdot n^{-\alpha} \underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow} 0, \text{ da } \alpha>0.$$