Folgerung 4 (Konvexitätssatz):

Def.: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für alle $x, y \in I$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt

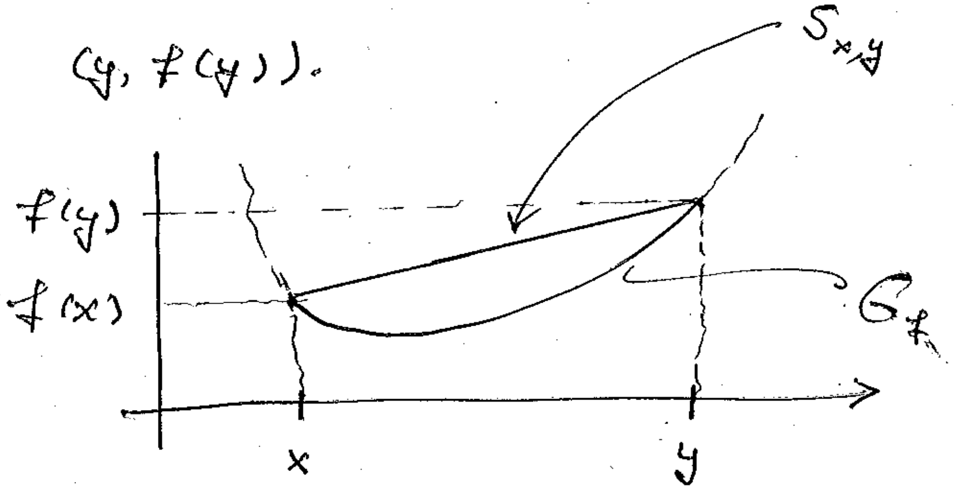
$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y). \quad (K)$$

f heißt streng konvex, wenn (K) mit strikter Ungleichung "<" gilt; f heißt (streng) konkav, wenn $-f$ (streng) konvex ist.

Geometrische Interpretation: Die Begriffe konvex und konkav charakterisieren das Krümmungsverhalten des Graphen G_f. Man sagt, G_f sei links (rechts) gekrümmt, wenn f konvex (konkav) ist. Bei dieser Sprechweise wird unterstellt, dass G_f in Richtung wachsender Argumente x durchlaufen wird. Die Menge

$$S_{x,y} := \{ (\lambda x + (1-\lambda) y, \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) : 0 \leq \lambda \leq 1 \}$$

ist die Sekante zu G_f durch die Punkte $(x, f(x))$ und $(y, f(y))$.



Die Ungleichung (K) in der Def. von konvex bedeutet geometrisch also gerade die Forderung, dass 5.171 alle Sekanten durch G_f oberhalb dieses Graphen verlaufen. Entsprechend liegen alle Sekanten durch den Graphen einer konkaven Funktion f unterhalb von G_f.

Um den Bezug zur D'barkeit herzustellen, schreiben wir die Bedingung (K) etwas um. Wir setzen

$$z = \lambda x + (1-\lambda) y = x + (1-\lambda)(y-x) = \lambda (x-y) + y \in (x,y)$$

so dass $1-\lambda = \frac{z-x}{y-x}$ und $\lambda = \frac{y-z}{y-x}$. Damit wird

(K) zu

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) = f(x) + (1-\lambda)(f(y)-f(x))$$

$$\cancel{= \lambda (f(x)-f(y)) + f(y)}$$

$$= f(x) + (1-\lambda)(f(y)-f(z)+f(z)-f(x))$$

bzw. zu

$$\cancel{\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}}$$

$$\lambda (f(z)-f(x)) \leq (1-\lambda)(f(y)-f(z))$$

$$\iff \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z} \qquad (\forall\, x<z<y \in I).$$

Dabei ist für die strenge Konvexität "$\leq$" durch "$<$" zu ersetzen. Notieren wir das als

Lemma K1: Eine Funktion $f: I \to \mathbb{R}$ ist (streng) konvex genau dann, wenn für alle $x < z < y \in I$ gilt

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \underset{(<)}{\leq} \frac{f(y)-f(z)}{y-z}.$$

Konvexe Funktionen sind i. allg. nicht diff'bar, wie das Bsp. $f(x) = |x|$ zeigt. Wenn wir die Diffbarkeit jedoch voraussetzen, erhalten wir

Lemma K2: Sei $f: I \to \mathbb{R}$ diff'bar. Dann gelten:

(1) f ist konvex genau dann, wenn f' monoton steigend ist.

(2) f ist streng konvex, wenn f' streng monoton steigt.

Bew.: "$\Rightarrow$" Ist f konvex, so gilt nach Lemma K1 für alle $x < z < y \in I$ die Ungleichung

$$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(y)-f(z)}{y-z}$$

$z \nearrow y$ ergibt: $\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f'(y)$

$z \searrow x$ " : $f'(x) \leq \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$.

"$\Leftarrow$" Sind $x < z < y \in I$ gegeben, so existieren nach dem MWS Zwischenstellen $\xi_1 \in (x, z)$ und $\xi_2 \in (z, y)$, so dass $\dfrac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(\xi_1)$ und $\dfrac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(\xi_2)$.

Die Monotonievoraussetzungen an f' liefern nun die entsprechenden Ungleichungen in Lemma K1. $\square$

Setzen wir schließlich f als $2\times$ diff'bar voraus
und verbinden das bisherige mit dem Monotonie-satz (anzuwenden auf f'), so ergibt sich:

Folgerung 4 (Konvexitätssatz): Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ zweimal diffbar. Dann gilt

(1) f ist konvex genau dann, wenn $f''(x) \geq 0$ für alle $x \in I$ ist;

(2) f ist streng konvex, wenn $f''(x) > 0$ ist für alle $x \in I$;

(3) f ist konkav genau dann, wenn $f''(x) \leq 0$ ist für alle $x \in I$;

(4) f ist streng konkav, wenn $f''(x) < 0$ ist für alle $x \in I$.

Gegenbsp. für "$\not\Leftarrow$" in (2): $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4$ ist streng konvex, obwohl $f''(0) = 0$ gilt.