5.2 Mittelwertsatz und lokale Extrema

Def.: Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann hat f in $x_0 \in I$ ein lokales Maximum (Minimum), falls gilt: Es ex. $\varepsilon > 0$, so daß $f(x_0) \geq f(x)$ ($f(x_0) \leq f(x)$) für alle $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I$.

Bem.: (1) Extremum = Maximum oder Minimum

(2) globales Maximum (oder einfach nur Maximum), falls $f(x_0) \geq f(x)$ $\forall x \in I$; entsprechend für Min.

(3) Ein lokales Maximum heißt isoliert, wenn ein $\varepsilon' > 0$ existiert, so dass für alle $x \in I \setminus \{x_0\}$ mit $|x - x_0| < \varepsilon'$ gilt, dass $f(x_0) > f(x)$. (Hierbei ist ggf. $0 < \varepsilon' < \varepsilon$.) Entsprechend für ein Minimum.

(4) Der Punkt x_0 wird als lokale Maximal-/Minimal- bzw. Extremalstelle bezeichnet. Diese ist zu unterscheiden vom lokalen Extremum $f(x_0)$.

Satz 1 (notwendiges Kriterium für Extrema): Es sei $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in (a,b)$. Besitzt f in x_0 ein lokales Extremum, so ist $f'(x_0) = 0$.

Bem.: Das Intervall in Satz 1 ist offen. Für Randextrema gilt die Aussage des Satzes nicht. Bsp.: $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x$ hat in $x_0 = 0$ ein Minimum und in $x_1 = 1$ ein Maximum, aber es gilt $f'(x_0) = f'(x_1) = 1 \neq 0$.

Bew.: (für ein lokales Minimum): Für $h>0$ haben wir

$$f(x_0+h)-f(x_0)\geq 0 \Rightarrow \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)\geq 0.$$

Entsprechend erhalten wir für $h<0$:

$$f(x_0+h)-f(x_0)\geq 0 \Rightarrow \frac{1}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)\leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{1}{h}\left(f(x_0+h)-f(x_0)\right)\leq 0$$

Da f in x_0 als d'bar vorausgesetzt ist, folgt $f'(x_0)=0$. □

Eine Konsequenz aus diesem einfachen Kriterium ist der

Satz 2 (Rolle): Ist $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, d'bar in (a,b) mit $f(a)=f(b)$. Dann existiert $\xi\in(a,b)$, so daß $f'(\xi)=0$

Bew.: Die Folgerung ist klar, wenn f konstant ist. Andernfalls existieren $x_0, x_1\in[a,b]$, so daß $f(x_0)\geq f(x)\geq f(x_1)$ (Satz vom Max. und Min.), wobei $f(x_0)>f(a)$ oder $f(a)>f(x_1)$ (sonst: f konst.)

Wir nehmen $f(x_0)>f(a)$ an. Dann ist $x_0\in(a,b)$ und f besitzt in x_0 ein lokales Maximum. Mit Satz 1 folgt: $f'(x_0)=0$.

□

Der Satz von Rolle ist ein Spezialfall des Mittelwertsatzes, den wir gleich in allgemeiner Form formulieren und beweisen:

<u>Satz</u> 3 (allgemeiner Mittelwertsatz): Es seien $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig, d'bar in (a,b), und es gelte $g'(x)\neq 0$ für alle $x\in(a,b)$. Dann existiert ein $\xi\in(a,b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

<u>Bew.</u>: Es ist $g'(x)\neq 0 \ \forall x\in(a,b)$ vorausgesetzt. Hieraus folgt $g(b)-g(a)\neq 0$ (Rolle), also sind beide Seiten der Gleichung definiert. Wir setzen

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,(g(x)-g(a)).$$

$\Longrightarrow$ $F(a)=f(a)$, $F(b)=f(b)-(f(b)-f(a))=f(a)=F(a)$,

F ist stetig auf $[a,b]$ und d'bar auf (a,b).

$\Longrightarrow$ (Rolle) $\exists\ \xi\in(a,b)$ mit $0=F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\,g'(\xi)$.

Division durch $g'(\xi)$ ergibt die behauptete Gleichung. □

<u>Bem.</u>: Für $f(b)=f(a)$ erhält man den Satz von Rolle als Spezialfall. Für $g(x)=x$ erhält man den Mittelwertsatz in der üblichen Form (wichtig, merken!):

Satz 4 (Mittelwertsatz, MWS): Sei $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ stetig und in (a,b) d'bar. Dann existiert $\xi\in(a,b)$, so daß

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi).$$

Folgerung 1: Seien $a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ mit $a<b$.

(a) Ist $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ d'bar mit $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$, so ist f konstant.

(b) Sind $f,g:(a,b)\to\mathbb{C}$ d'bar mit $f'(x)=g'(x)$ $\forall x\in(a,b)$, so ex. $c\in\mathbb{C}$, so daß $f(x)=g(x)+c$.

Bew.: (i) $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ d'bar mit $f'(x)=0$ $\forall x\in(a,b)$. Dann gilt für alle $x_{1,2}\in(a,b)$: $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$.

(ii) Für $f:(a,b)\to\mathbb{C}$ ist (i) auf $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ anzuwenden. Damit ist (a) gezeigt.

Anwendung von (a) auf $f-g$ liefert (b). □

Anwendungen:

(1) Charakterisierung der Exponentialfunktion:

Ist $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ d'bar mit $f'=f$ und $f(0)=1$, so gilt $f(x)=\exp(x)$.

Bew.: $F(x)=f(x)\cdot\exp(-x)\Rightarrow F'(x)=f'(x)\cdot\exp(-x)+\ldots$

$\ldots f(x)\cdot(-\exp(-x))=0.\Rightarrow F$ konstant.

Wg. $f(0)=1=\exp(-0)$ folgt weiter: $F(x)=F(0)=1$, □

also: $f(x)=\exp(x)$.

(2) Die Logarithmusreihe: Für $x \in (-1,1)$ gelten

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{und} \quad \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Bew.: $\frac{d}{dx} \ln(1-x) = \frac{-1}{1-x}$ und $\frac{d}{dx}\left(-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) = -\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{-1}{1-x}$

Also stimmen die Ableitungen beider Seiten überein.

Folgerung 1 (b) ergibt

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} + C.$$

Aus $0 = \ln(1) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\Big|_{x=0}$ folgt $C=0$ und

damit die erste Gleichung. Hieraus ergibt sich die zweite leicht als Funktionalgleichung des ln:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) &= \ln(1-(-x)) - \ln(1-x) \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left((-x)^n - x^n\right) \\ &= 2\cdot \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{x^n}{n} = 2\cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}. \qquad \square\end{aligned}$$

In ähnlicher Weise kann man für $x \in (-1,1)$ die Potenzreihendarstellung $\arctan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}(-1)^n$ des Arcus Tangens gewinnen $\longrightarrow$ A44 (Blatt 11).

Folgerung 2: Es seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, $a<b$ und

$f: (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann gelten:

(a) $f'(x) > 0 \;\; \forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist in (a,b) streng monoton steigend

(b) $f'(x) \geq 0 \;\forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ ist in (a,b) monoton steigend

(c) $f'(x) < 0 \;\forall x \in (a,b) \Rightarrow f$ ist in (a,b) streng monoton fallend

(d) $f'(x) \leq 0 \;\; \forall x \in (a,b) \Leftrightarrow f$ ist in (a,b) monoton fallend.

Bem.: Umkehrungen in (a) und (c) gelten nicht!

Bsp. $f(x) = x^3$ bzw. $f(x) = -x^3$ in $x_0 = 0$.

Bew.: (a) $f'(\xi) > 0$ und $x > y \Rightarrow f(x) - f(y) \underset{\text{MWS}}{=} f'(\xi)(x-y) > 0$

(b) "$\Rightarrow$" analog.

"$\Leftarrow$" Für $h > 0$: $\quad f(x+h) - f(x) \geq 0$,

" $\quad h < 0$: $\quad f(x+h) - f(x) \leq 0$.

In beiden Fällen: $\frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) \geq 0$.

Diese Ungleichung bleibt erhalten im Grenzwert $h \to 0$.

(c) und (d) folgen aus (a) und (b) durch

Übergang zu $\tilde{f} = -f$. $\square$

Bem.: Sind $a, b \in \mathbb{R}$, kann man in Folgerung 2 das offene Intervall $(a;b)$ durch das abgeschlossene Intervall $[a,b]$ (oder auch durch halboffene) ersetzen.

Es reicht sogar: f stetig auf $[a,b]$, d'bar in (a,b).

Die gerade gezeigte Folgerung 2 aus dem MWS wird mitunter als Monotoniesatz bezeichnet, in einfachen Fällen ist sie vollkommen ausreichend für Extremwertbestimmungen.

Bsp.: Die auf $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a>0,\ b,c\in\mathbb{R})$$

besitzt genau ein globales Minimum in $x_0 = -\frac{b}{2a}$, weitere lokale Extrema existieren nicht.

Begründung: $f'(x) = 2ax + b$. Also $f'(x) < 0$ für $x < -\frac{b}{2a}$ und damit f streng monoton fallend auf $(-\infty, x_0]$ (einschließlich des Randpunkts, da f dort stetig ist!). Auf $[x_0, \infty)$ ist f streng monoton steigend, weil $f'(x) > 0$ ist für $x > x_0$.
Ergebnis: f besitzt in x_0 ein isoliertes globales Minimum. (Ähnlich: A45 der Übungen, 1. Teil)

<u>Folgerung 3</u> (Schrankensatz): Es sei $I\subset\mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I\to\mathbb{R}$ differenzierbar mit

$$|f'(x)| \le L \qquad \forall x\in I.$$

Dann ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L und daher gleichmäßig stetig.

<u>Beweis</u>: $|f(x)-f(y)| \underset{MWS}{=} |f'(\xi)(x-y)| \le L|x-y|$. $\square$

<u>Bsp.</u>: $\arctan: \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig, da

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \in (0,1].$$