4.2 Sätze über stetige reellwertige Funktionen

Lemma 1: Jede kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Maximum und ein Minimum.

Bew.: K kompakt $\Rightarrow$ K beschränkt $\Rightarrow$ $\sup K < \infty$

Dann existiert eine Folge (x_n) in K mit $\lim_{n \to \infty} x_n = \sup K$. Da K abgeschlossen ist, folgt $\sup K \in K$. Also existiert ein größtes Element. $\square$

(Entsprechend für das Minimum)

Als Folgerung aus Lemma 1 und Satz 4 aus A4.1 ergibt sich:

Satz 1 (Satz vom Maximum und Minimum): Es sei $K \subset \mathbb{C}$ kompakt und $f: K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f sein Maximum und sein Minimum an, d.h. es existieren $z_{1,2} \in K$, so daß

$$f(z_1) \leq f(z) \leq f(z_2) \quad \forall z \in K.$$

Bez.: In diesem Fall heißt z_2 eine Maximalstelle und z_1 eine Minimalstelle von f.

Satz 2 (Zwischenwertsatz, ZWS): Es sei $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(a) < c < f(b)$. Dann existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.

Bew.: Wir definieren eine Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_n$ durch $[a_0, b_0] = [a,b]$ und

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [a_n, \frac{1}{2}(a_n+b_n)], & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) \geq c \\ [\frac{1}{2}(a_n+b_n), b_n], & \text{falls } f(\frac{a_n+b_n}{2}) < c. \end{cases}$$

Dann ist $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ und $b_n - a_n = 2^{-n}(b-a)$, d.h. es liegt tatsächlich eine Intervallschachtelung vor. Nach dem Intervallschachtelungsprinzip existiert ein

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} [a_n, b_n] \text{ mit } \xi = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgrund unserer Wahl der Intervalle $[a_n, b_n]$ ist

$$f(a_n) \leq c \leq f(b_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und daher aufgrund der Stetigkeit von f

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} a_n) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) \leq c$$

sowie

$$f(\xi) = f(\lim_{n\to\infty} b_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \geq c.$$

Also: $f(\xi) = c$. $\square$

Folgerung: Ist $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $f(a) > c > f(b)$, so existiert ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = c$.
(Wende Satz 2 an auf $\tilde{f} = -f$!)

Anwendung: Nullstellen und Periodizität der trigonometrischen Funktionen

Satz 3: Die Funktion $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ besitzt im Intervall $[0,2]$ genau eine Nullstelle.

Zur Vorbereitung benötigen wir:

Lemma 2: Für $x \in (0,2]$ gelten:

1. $\cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, insbes. $\cos(2) < -\frac{1}{3}$,
2. $\sin(x) > x - \frac{x^3}{6} > 0$.

Bew.: **1.** $\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + R_3(x)$

mit $R_3(x) = \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = - \sum_{\substack{k=3 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)}\right)}_{>0} < 0$

2. $\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{6} + R_2(x)$

mit $R_2(x) = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{\substack{k=2 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{(2k+2)(2k+3)}\right)}_{>0}$,

also $R_2(x) > 0$ für $0 < x \leq 2$.

Folgerung: Wg. $\cos(0) = 1$ und $\cos(2) < -\frac{1}{3}$ existiert nach dem ZWS ein $\xi \in (0,2)$ mit $\cos(\xi) = 0$, da $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist.

Es bleibt die Eindeutigkeitsaussage in Satz 3 zu beweisen. Dazu definieren wir:

Def. (monotone Funktion) Eine Funktion $f : \mathbb{R} \supset X \to \mathbb{R}$ heißt

1. (streng) monoton steigend $:\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ $(f(x) < f(y))$
2. (") " fallend $:\Leftrightarrow x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$ $(f(x) > f(y))$

Bem. und Bsp.: (1) Ist f streng monoton, so ist f injektiv.

(2) $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \exp(x)$ ist streng monoton steigend,

denn aus $\exp(x) > 0$ folgt für $h > 0$, daß

$$\exp(x+h) = \underbrace{\exp(h)}_{>1 \,\leadsto\, \text{Übung zu heute (A34)}} \cdot \exp(x) > \exp(x)$$

(3) $\cos : [0,2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ ist streng monoton fallend,

denn für $0 \leq y < x \leq 2$ ist $\cos(x) - \cos(y)$

$$\overset{\text{Ü (A35)}}{=} -2 \underbrace{\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)}_{>0} \underbrace{\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}_{>0} < 0 .$$

nach Lemma 2

Mit (1) und (3) ist auch die Eindeutigkeit der Nullstelle in Satz 3 bewiesen.

Def.: Wir definieren $\frac{\pi}{2}$ als die eindeutig bestimmte Nullstelle von $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \cos(x)$ im Intervall $[0,2]$.

Mit der Eulerschen Formel und den Additionstheoremen ergibt sich hieraus eine Reihe von

Folgerungen: (1) Wertetabelle

$f(x)$ \ x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\exp(ix)$	1	i	-1	$-i$	1
$\sin(x)$	0	1	0	-1	0
$\cos(x)$	1	0	-1	0	1

1. Spalte: Potenzreihen

2. Spalte: $\cos(\frac{\pi}{2})$: Def., $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ (Pythagoras + Lemma 2)

$\exp(i\frac{\pi}{2}) = i$: Euler

1. Zeile: $\exp(ik\frac{\pi}{2}) = \exp(i\frac{\pi}{2})^k = i^k$ (Funktionalgleichung, gilt für $k \in \mathbb{Z}$)

Rest: Eulersche Formel.

(2) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten

(i) $\exp(z \pm i\frac{\pi}{2}) = \pm i \exp(z)$, $\exp(z + i\pi) = -\exp(z)$

sowie $\exp(z + 2\pi i) = \exp(z)$

(die Exponentialfunktion ist also $2\pi i$-periodisch)

(ii) $\cos(z + \frac{\pi}{2}) = -\sin(z)$, $\cos(z+\pi) = -\cos(z)$, $\cos(z+2\pi) = \cos(z)$

(iii) $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$, $\sin(z+\pi) = -\sin(z)$, $\sin(z+2\pi) = \sin(z)$

Begründungen: (i) Funktionalgleichung und (1)

(ii) $\cos(z + \pi/2) = \cos(z)\cos(\frac{\pi}{2}) - \sin(z)\sin(\frac{\pi}{2}) \underset{(1)}{=} -\sin(z)$

$\cos(z+\pi) = \cos(z)\cos(\pi) - \sin(z)\sin(\pi) \underset{(1)}{=} -\cos(z)$

$\cos(z+2\pi) = \cos(z+\pi+\pi) = -\cos(z+\pi) = \cos(\pi)$.

(iii) Analog.

(3) (a) $\{x \in \mathbb{R} : \cos(x) = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

(b) $\{x \in \mathbb{R} : \sin(x) = 0\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$

Bew.: (a) P.d.: $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, aus $\cos(x) = \cos(-x)$ folgt $\cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$, mit $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ ergibt sich weiter $\cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$.

Für $x \in [0, \frac{\pi}{2})$ ist – ebenfalls p.d. von π – $\cos(x) > 0$, wg. $\cos(x) = \cos(-x)$ also auch $\cos(x) > 0$ auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Folgerung (2), (ii) ($\cos(z) = -\cos(z + \pi)$) liefert: $\cos(x) < 0$ auf $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.
Mit der Periodizität von cos folgt: Der Abstand zweier benachbarter Nullstellen beträgt π. Also gibt es keine weiteren Nullstellen.

(b) ist wg. $\sin(z + \frac{\pi}{2}) = \cos(z)$ äquivalent zu (a).

(Auch in $\mathbb{C}$ gibt es keine weiteren Nullstellen von sin und cos $\longrightarrow$ Übungen)

Die Kenntnis dieser Nullstellen erlaubt die Definition der Tangens- und Cotangensfunktion:

Def.: (Tangens, Cotangens)

1. Für $z \in \mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ setzen wir

$$\tan(z) := \frac{\sin(z)}{\cos(z)},$$

2. für $z \in \mathbb{C} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ definiert man

$$\cot(z) := \frac{\cos(z)}{\sin(z)}.$$

Wir kommen zur Frage der Stetigkeit der Umkehrfunktion einer streng monotonen stetigen Funktion.

<u>Satz</u> 4 : Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f: I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Dann ist auch $J := f(I)$ ein Intervall und $f^{-1}: J \to I$ ist in gleicher Weise streng monoton und stetig.

<u>Bew.</u>: Dass J ein Intervall ist, folgt aus dem ZWS. f ist streng monoton, also injektiv. Betrachten wir $f: I \to J$, so ist diese Funktion also bijektiv und daher existiert die Umkehrfunktion

$$f^{-1}: J \to I.$$

Um die Aussagen über f^{-1} zu beweisen, nehmen wir o.E. f als streng monoton steigend an.$^{(*)}$

(i) Wäre f^{-1} nicht streng monoton steigend, so gäbe es $y_1 < y_2 \in J$ mit $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$. Anwendung von f (monoton steigend!) führt auf

$$y_1 = f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2)) = y_2$$ und damit zum Widerspruch.

(ii) Wir nehmen an, f^{-1} sei in $y_0 \in J$ unstetig. Dann existiert eine Folge $(y_n)_n$ in J mit $\lim_{n\to\infty} y_n = y_0$ und ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß $|f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)| \geq \varepsilon$.

Jetzt gibt es zwei Möglichkeiten:

$(*)$ sonst: betrachte $\tilde{f} = -f$!

(a) Es existiert eine TF $(y_{n_k})_k$ mit

$$f^{-1}(y_{n_k}) \geq f^{-1}(y_0) + \varepsilon_0$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n_k} \geq f(f^{-1}(y_0) + \varepsilon_0) \qquad \text{(Monotonie)}$$

$$\Longrightarrow \quad \underbrace{y_0 \geq}_{\lim\limits_{k\to\infty}} f(f^{-1}(y_0) + \varepsilon_0) \underbrace{>}_{\text{strenge Monotonie}} f(f^{-1}(y_0)) = y_0 \quad \lightning$$

(b) Es ex. eine TF $(y_{n_k})_k$ mit

$$f^{-1}(y_{n_k}) \leq f^{-1}(y_0) - \varepsilon_0$$

$$\Longrightarrow \quad y_{n_k} \leq f(f^{-1}(y_0) - \varepsilon_0) \Rightarrow y_0 \leq f(f^{-1}(y_0) - \varepsilon_0) < y_0 \quad \lightning$$

$\square$

Bem. und Bsp.:

(1) Die Stetigkeit der Umkehrfunktion in Satz 4 beruht auf der Monotonie von f und damit auf der Anordnung von $\mathbb{R}$. Im allg. ist die Umkehrfunktion einer stetigen Funktion nicht stetig:

$$f : [0, 2\pi) \to S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},\ x \mapsto f(x) = e^{ix}$$

ist stetig und bijektiv, aber die Inverse

eine solche Darst. ex. immer, s.u.

$$f^{-1} : S^1 \to [0, 2\pi), \quad e^{ix} \mapsto f^{-1}(e^{ix}) := x$$

ist unstetig in $z_0 = 1 = e^{i \cdot 0}$. Denn in jeder Umgebung von z_0 gibt es $z \in S^1$ mit $f^{-1}(z) \geq \pi$!

(2) Die Existenz p-ter Wurzeln zu einer natürlichen Zahl p haben wir konstruktiv durch das "babylonische Wurzelziehen" gewonnen:

$$x_{n+1} = \frac{1}{p}\left((p-1)x_n + \frac{a}{x_n^{p-1}}\right)$$

$p = 2$: Vorl.

$p \geq 3$: Übung 1.19

Satz 4 liefert einen weiteren Beweis:

$f : [0, \infty) \to [0, \infty)$, $x \mapsto f(x) = x^p$ ist stetig und streng monoton steigend (für $0 \leq y < x$: $x^p - y^p = (x-y)\sum_{k=0}^{p-1} x^{p-1-k} y^k > 0$ – geometrische Summenf.)

und surjektiv: $f(0) = 0$ und $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ sowie ZWS. Die durch Satz 4 garantierte Umkehrfunktion ist gerade die p-te Wurzel: $f^{-1}(y) = \sqrt[p]{y}$.