

3.2 Umordnung von Reihen und das Cauchy-Produkt

3.15

Wir beginnen mit einigen Folgerungen aus dem Majorantenkriterium:

Lemma 1: Es sei $(c_n)_n$ eine Folge in \mathbb{C} mit

$$c_n = a_n + ib_n, \quad a_n, b_n \in \mathbb{R}. \text{ Dann gilt: } \sum_{n=1}^{\infty} c_n \text{ konvergiert genau dann absolut, wenn beide Reihen}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergieren.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ absolut konvergieren.}$$

Bew.: Folgt aus den Ungleichungen

$$|c_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq 2|c_n|$$

und dem Majorantenkriterium. \square

Für eine reelle Zahl x setzen wir $x^+ := \max(x, 0)$

und $x^- := \max(-x, 0)$, so daß $x = x^+ - x^-$ und

$$|x| = x^+ + x^-.$$

Lemma 2: Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge. Dann

gilt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut \Leftrightarrow

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \text{ konvergieren.}$$

Bew.: $|a_n| = a_n^+ + a_n^-$ und $a_n^\pm \leq |a_n|$

und Majorantenkriterium. \square

Folgerung: Ist (a_n) eine reelle Zahlenfolge, so daß ^{3.16}

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut konvergiert,

so divergieren beide Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

Bew. Konvergieren $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$, so

konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Nach Lemma 2 ist dann $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent.

Diese recht einfachen Beobachtungen bilden den Schlüssel zum Beweis des nachfolgenden Riemannschen Umordnungssatz.

Def.: Es sei $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ bijektiv. Dann heißt

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ eine Umordnung der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

(Riemann)

Satz 1 Es sei (a_n) eine reelle Zahlenfolge

und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, aber nicht absolut

konvergiert. Dann gibt es zu jedem $c \in \mathbb{R}$

eine Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so daß

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = c.$$

Beweis: Unter den Voraussetzungen des Satzes existieren

hierzu auch Umordnungen von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so daß

$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \infty$ oder $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = -\infty$. Daher nennt man

solche Reihen auch bedingt konvergent.

Beweisidee: (a_n) zerfällt vollständig in zwei

Teilfolgen $(a_{n_k})_k$ und $(\tilde{a}_{n_k})_k$ mit

$$\tilde{a}_{n_k} < 0 \leq a_{n_k}$$

und nach der Folgerung aus Lemma 2 gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} = \infty = - \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{a}_{n_k} \quad (*)$$

Sei nun $C \in \mathbb{R}$ vorgelegt, o. E. $C \geq 0$, so wählt

man

$$a_{\sigma(1)} = a_{n_1}, \dots, a_{\sigma(N)} = a_{n_N}$$

so daß $\sum_{u=1}^{N-1} a_{\sigma(u)} \leq C < \sum_{u=1}^N a_{\sigma(u)}$,

anschließend $a_{\sigma(N+1)} = \tilde{a}_{n_1}, \dots, a_{\sigma(N+M)} = \tilde{a}_{n_M}$,

so daß $\sum_{u=1}^{N+M-1} a_{\sigma(u)} \geq C > \sum_{u=1}^{N+M} a_{\sigma(u)}$.

Beides ist möglich nach (*). Anschließend immer
währt man wieder positive Folgeglieder auf, bis
C überschritten wird, dann wieder negative, etc.
Nach (*) bricht dieser Prozess niemals ab.

Da $\sum_{u=1}^{\infty} a_u$ konvergiert, gilt $\lim_{u \rightarrow \infty} a_u = \lim_{u \rightarrow \infty} a_{\sigma(u)} = 0$

und daher $\sum_{u=1}^{\infty} a_{\sigma(u)} = C$.

Bsp. 1 Die alternierende harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ konv. 3,18

vergiert nach dem Leibniz-Kriterium und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{= \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}_{\geq 0} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{6}}_{\geq 0} + \dots =: C \geq \frac{1}{2} > 0.$$

Umordnung!

$$\begin{aligned} & \underbrace{1 - \frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{3} - \frac{1}{6}}_{\frac{1}{6}} - \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{10}}_{\frac{1}{10}} - \frac{1}{12} + \dots - \dots + \dots \\ & = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots - \dots + \dots = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots \right) \\ & = \frac{C}{2} \neq C. \end{aligned}$$

Divergente Pathologien sind bei absolut konvergenten Reihen ausgeschlossen, wie der folgende Satz zeigt:

Satz 2 (Umordnungssatz): Es sei (a_n) eine komplexe Zahlenfolge und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent. Dann konvergiert auch jede Umordnung $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ absolut und es gilt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$.

Rem. 1 Man nennt daher absolut konvergente Reihen mitunter auch unbedingt konvergent.

Bew. des Satzes:

1. Zunächst sei $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^N a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

denn alle Summanden in der endlichen Summe links treten auch in der Reihe rechts auf. Das Majorantenkriter. liefert die Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}$; da die Ungleichung im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ erhalten bleibt, haben wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Dasselbe Argument ergibt auch die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leq \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}, \text{ also } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}.$$

2. Angewendet auf $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ und $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|$ er-

halten wir aus dem Teilergebnis zu 1.:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut} \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \text{ konvergiert absolut und es gilt } \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |a_{\sigma(k)}|.$$

3. Wir betrachten den Fall $a_n \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}$. Dann

haben wir mit Lemma 2:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert absolut}$$

$$\Rightarrow \text{Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \text{ konvergieren.}$$

$$\Rightarrow \text{Reihe } \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}^+ \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)}^- \text{ konvergieren.}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \text{ konvergiert und es gilt}$$

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{\infty} a_{\sigma(u)} &= \sum_{u=1}^{\infty} a_{\sigma(u)}^+ - \sum_{u=1}^{\infty} a_{\sigma(u)}^- \\ &= \sum_{u=1}^{\infty} a_u^+ - \sum_{u=1}^{\infty} a_u^- = \sum_{u=1}^{\infty} a_u. \end{aligned}$$

4. Sind allgemein $a_u \in \mathbb{C} \quad \forall u \in \mathbb{N}$ so ist

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^{\infty} a_u &= \sum_{u=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_u + i \sum_{u=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_u \\ &= \sum_{u=1}^{\infty} \operatorname{Re} a_{\sigma(u)} + i \sum_{u=1}^{\infty} \operatorname{Im} a_{\sigma(u)} = \sum_{u=1}^{\infty} a_{\sigma(u)}. \end{aligned}$$

□

Den gerade bewiesenen Umordnungssatz kann man als Kommutativgesetz für absolut konvergente Reihen auffassen. Dabei stellt sich natürlich die Frage nach einer entsprechenden Verallgemeinerung des Distributivgesetzes. Anders formuliert: Unter welchen Voraussetzungen gilt

$$\left(\sum_{u=1}^{\infty} a_u \right) \left(\sum_{u=1}^{\infty} b_u \right) = \sum_{u=1}^{\infty} \left(\sum_{u=1}^{\infty} a_u b_u \right) ?$$

$$\left(=: \sum_{u=1}^{\infty} \sum_{u=1}^{\infty} a_u b_u \right)$$

Überraschenderweise ist hierfür lediglich die Konvergenz beider Reihen erforderlich!

Lemma 3: Es seien $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{m=1}^{\infty} b_m$ konvergente

3.21

Reihen komplexer Zahlen. Dann gilt

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_n b_m$$

Bew.: Wir verwenden $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit

$\lambda = \sum_{m=1}^{\infty} b_m$ und erhalten

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) \cdot a_n$$

Nun ist aber auch $\mu \cdot \sum_{m=1}^{\infty} b_m = \sum_{m=1}^{\infty} \mu b_m$, mit

$\mu = a_n$ ergibt sich

$$\left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) a_n = \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m$$

Durch Zst. folgt

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n b_m$$

Entsprechend für die andere Summationsreihenfolge. \square

Bem.: Ohne die Produktstruktur der Summanden und ohne die Vor. der absoluten Konvergenz wird die Aussage falsch. Bsp.: $a_{nm} = \begin{cases} 0 & \text{für } n=m \\ \frac{1}{n^2-m^2} & \text{für } n \neq m \end{cases}$

$$\text{Dann ist } 0 \neq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{nm}$$

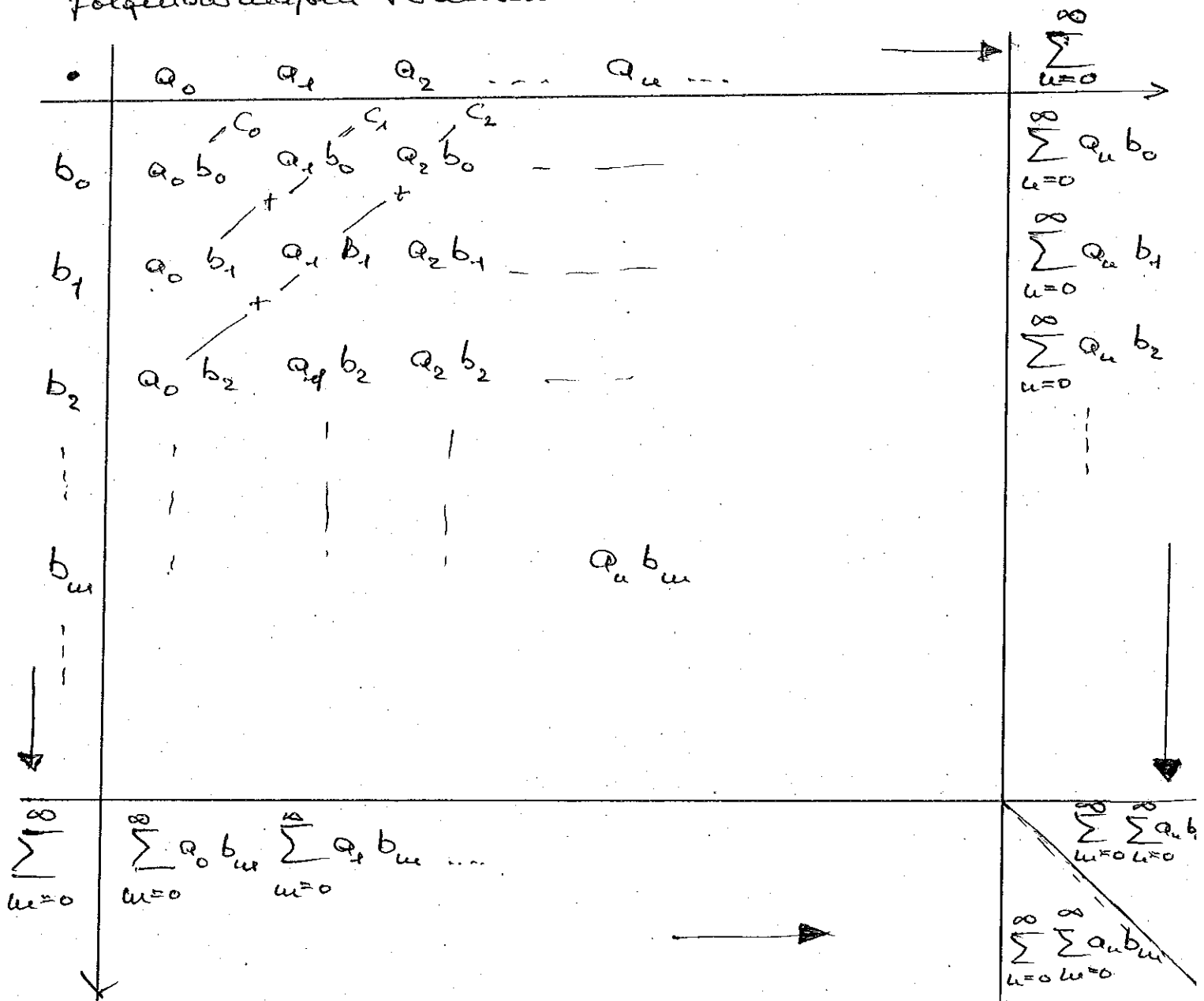
$$\text{d.h. } a_{nm} = -a_{mn}$$

nichttriviale
Rechnung mit

Teleskopreihen! \rightarrow Tutorium

Die beiden Summationsverfahren aus Lemma 3 können 3.2:

folgendermaßen veranschaulicht werden:



Aussage des Lemmas: Beide Summationsreihenfolgen führen für beliebig konvergente Reihen

$$\sum_{u=1}^{\infty} a_u \text{ und } \sum_{u=1}^{\infty} b_u \text{ zum selben Ergebnis.}$$

3. Möglichkeit Zilbe zunächst die endlichen Summen über die Diagonalen von rechts oben nach links unten, also

$$c_u = \sum_{k=0}^u a_{u-k} b_k$$

und Summieren anschließend über c_u !

Def.: Für Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$ heißt

3.23

die Folge $(c_n)_{n \geq 0}$ mit

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k = \sum_{\substack{0 \leq k, l \leq n \\ k+l=n}} a_l b_k$$

die Faltung der Folgen $(a_n)_{n \geq 0}$ und $(b_n)_{n \geq 0}$.

Das vorgeschlagene Summationsverfahren ist mit einer Reihenumordnung verbunden und führt im allgemeinen nicht zum Ziel:

Beisp.: $(a_n) = (b_n) = \frac{(-1)^n}{|n+1|} \quad (n \geq 0).$

Für die Faltung von (a_n) mit (b_n) erhalten wir

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{|n+1-k|} \cdot \frac{(-1)^k}{|k+1|} = (-1)^n \cdot \sum_{k=0}^n \frac{1}{|n+1-k|} \cdot \frac{1}{|k+1|}$$

$$\Rightarrow |c_n| \geq \underbrace{(n+1)}_{\text{Aus der Summanden}} \cdot \underbrace{\frac{1}{|n+1|} \cdot \frac{1}{|n+1|}}_{\text{untere Schranke für alle Summanden}} = 1$$

Aus der Summanden

untere Schranke für alle Summanden.

Also! (c_n) ist keine Nullfolge, somit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

divergent, obwohl $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nach

dem Leibniz-Kriterium konvergieren.

Unter der Voraussetzung der absoluten Konvergenz beider Reihen 3.24 erhält man jedoch das gewünschte Ergebnis:

Satz 3 (Cauchy-Produkt von Reihen): Es seien $\sum_{u=0}^{\infty} a_u$ und

$\sum_{u=0}^{\infty} b_u$ absolut konvergente Reihen und $(c_u)_{u \geq 0}$ die

Faltung von $(a_u)_{u \geq 0}$ und $(b_u)_{u \geq 0}$. Dann ist auch

$\sum_{u=0}^{\infty} c_u$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{u=0}^{\infty} c_u = \left(\sum_{u=0}^{\infty} a_u \right) \left(\sum_{u=0}^{\infty} b_u \right)$$

Bew.: (1) $a_u \geq 0$ und $b_u \geq 0$ für alle $u \in \mathbb{N}$

Dann ist

$$\sum_{u=0}^N c_u = \sum_{u=0}^N \sum_{k=0}^u a_{u-k} b_k \leq \sum_{u=0}^N \sum_{u=0}^N a_u b_u$$

Lemma $\rightarrow \leq \left(\sum_{u=0}^{\infty} a_u \right) \left(\sum_{u=0}^{\infty} b_u \right)$
3

denn: Alle Summanden links treten auch rechts auf.

Für $N \rightarrow \infty$ erhalten wir

$$\sum_{u=0}^{\infty} c_u \leq \left(\sum_{u=0}^{\infty} a_u \right) \left(\sum_{u=0}^{\infty} b_u \right)$$

Umgekehrt:

$$\sum_{u=0}^N \sum_{u=0}^N a_u b_u = \sum_{u=0}^{2N} \sum_{k=0}^u a_{u-k} b_k = \sum_{u=0}^N c_u$$

gilt auch hier!

Im Grenzwert $N \rightarrow \infty$ ergibt sich wieder mit Lemma 3

$$\left(\sum_{u=0}^{\infty} a_u \right) \left(\sum_{u=0}^{\infty} b_u \right) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} a_u b_u \leq \sum_{u=0}^{\infty} c_u$$

und damit die geforderte Identität.

(2) $a_n, b_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Hier gilt

$$|c_n| \leq \sum_{k=0}^n |a_{n-k}| |b_k| \quad (\Delta\text{'s-Multiplikation})$$

und daher nach (1)

$$\sum_{n=0}^N |c_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n |a_{n-k}| |b_k| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| \right)$$

Für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich also die absolute Konvergenz

$$\text{von } \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$

(3) Nachweis der Identität für $a_n, b_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m \right) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^+ - \sum_{m=0}^{\infty} b_m^- \right)$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^+ \right) - \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^+ \right)$$

$$- \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^+ \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^- \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n^- \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} b_m^- \right)$$

$$\stackrel{(1)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k}^+ b_k^+ - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k}^- b_k^+$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k}^+ b_k^- + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k}^- b_k^-$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k^+ - \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k^-$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$$

(4) Für $a_n, b_n \in \mathbb{C}$ zerlegt man in Real- und

Imaginärteil und führt die Rechnung

ähnlich wie in (3) durch. \square