2.5 Ergänzungen zur Vollständigkeit

2.5.1 Limes superior und limes inferior

Sei (a_n) eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Dann existiert aufgrund von Satz 6 des letzten Abschnitts für jedes $k \in \mathbb{N}$ das Supremum

$$S_k := \sup \{a_n : n \geq k\}.$$

Wir haben $\{a_n : n \geq k\} \supset \{a_n : n \geq k+1\}$, also $S_{k+1} \leq S_k$, d. h. die Folge (S_k) ist monoton fallend. Ferner existiert eine untere Schranke s von $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, so daß auch die Folge (S_k) nach unten beschränkt ist. Nach Folgerung 1 aus Satz 4 in A 2.4 existiert also der Grenzwert $\lim\limits_{k\to\infty} S_k$, ebenso der $\lim\limits_{k\to\infty} \inf \{a_n : n \geq k\}$. Dies erlaubt die folgende

Def.: Für eine beschränkte Folge (a_n) reeller Zahlen heißt

1. $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{k\to\infty} \sup \{a_n, n \geq k\}$

   der Limes superior (oberer Grenzwert) und

2. $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n := \lim\limits_{k\to\infty} \inf\{a_n : n \geq k\}$

der <u>Limes inferior</u> (unterer Grenzwert) der Folge (a_n).

Alt. Bez.: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$ für $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ und $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, a_n$

für $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$.

<u>Bsp.</u>: $a_n = (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$. Hierfür ist

$$s_k = \sup\left\{(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) : n \geq k\right\} = \begin{cases} 1+\frac{1}{k}, & \text{wenn } k \text{ gerade ist} \\ 1+\frac{1}{k+1}, & \text{wenn } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

Also $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{k\to\infty} s_k = 1$.

Ähnlich sieht man: $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -1$.

Dieses einfache Beispiel legt nahe, daß der $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ der größte und der $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n$ der kleinste Häufungswert der Folge (a_n) ist. Das ist tatsächlich der Fall, auch wenn keineswegs von vornherein klar ist, dass die Menge der Häufungswerte einer beschränkten Folge ein Maximum und ein Minimum besitzt. Wir hatten ja gesehen, daß diese Menge i. allg. nicht endlich ist.

Satz 1: (a_n) sei eine beschränkte Folge reeller Zahlen und $H((a_n))$ die Menge ihrer Häufungswerte.

Dann gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \max H((a_n)) \quad \text{und}$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \min H((a_n)).$$

Bew.: Es reicht, die Aussage für den $\limsup_{n\to\infty} a_n$ zu zeigen. Die zweite Identität ergibt sich hieraus durch Übergang zu $b_n := -a_n$.

Sei a ein HW von (a_n), also $a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}$ für eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von (a_n). Dann ist für jedes $k \in \mathbb{N}$

$$a_{n_k} \leq \sup\{a_n : n \geq k\} \qquad (\text{weil } n_k \geq k)$$

und daher

$$a = \lim_{k\to\infty} a_{n_k} \leq \lim_{k\to\infty} \sup\{a_n : n \geq k\} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Jeder Häufungswert von (a_n) ist also kleiner oder gleich dem Limes Superior, also

$$\sup H((a_n)) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Im nächsten Schritt zeigen wir die andere Ungleichung und dass das sup. tatsächlich ein max. ist.

Dazu sei wie oben $s_k = \sup\{a_n : n \geq k\}$. Dann existiert

eine $n(k) \geq k$ mit

$$s_k \geq a_{n(k)} \geq s_k - \frac{1}{k}.$$

Nun ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} s_k - \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} s_k - \frac{1}{k},$$

also nach dem Sandwich-Theorem auch

$$\lim_{k\to\infty} a_{n(k)} = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Jetzt ist noch nicht notwendig $n(k) \leq n(k+1)$, d.h.
$(a_{n(k)})_k$ ist noch nicht direkt die gesuchte Teilfolge.
Wir wählen also aus

$$a_{n_1} = a_{n(1)} \quad \text{und} \quad n_k = \min\{n(\ell) : n(\ell) \geq n_{k-1}\}$$

Dann ist $(a_{n_k})_k$ eine TF von $(a_{n(k)})_k$ und damit

auch von (a_n), die gegen $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n$ konvergiert.

Damit ist $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n \in H((a_n))$ gezeigt. $\square$

Folgerung: Für eine beschränkte Folge reeller Zahlen (a_n) sind äquivalent:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (b) $H((a_n)) = \{a\}$

(c) $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = \limsup\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Anwendung: Um (a) zu beweisen, reicht es also

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le a \le \liminf_{n\to\infty} a_n$$

und damit (c) zu zeigen.

Konvention: $\limsup\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, falls (a_n) nicht nach oben, und $\liminf\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, falls (a_n) nicht nach unten beschränkt ist.

2.5.2 Vollständigkeit von $\mathbb{C}$

Die Vollständigkeitseigenschaften von $\mathbb{R}$ übertragen sich auf $\mathbb{C}$, soweit sie unabhängig sind von der Anordnung.

Satz 2: Jede Cauchy-Folge (z_n) komplexer Zahlen konvergiert.

Bew.: Sei $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$, es gelte also

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $\forall n, m \geq N \ |z_n - z_m| < \varepsilon$.

Dann folgt wg. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ und $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$, daß auch $|x_n - x_m| < \varepsilon$ und $|y_n - y_m| < \varepsilon$. Also sind (x_n) und (y_n) Cauchy-Folgen in $\mathbb{R}$, mithin konvergent. Daher existieren $x, y \in \mathbb{R}$ mit

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \quad \text{und} \quad y = \lim_{n\to\infty} y_n .$$

Wir setzen $z := x + iy \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$z = \lim_{n\to\infty} x_n + i \cdot \lim_{n\to\infty} y_n \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Rechenregeln f. Grenzwerte}}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n + iy_n = \lim_{n\to\infty} z_n .$$

$\square$

Satz 3 (Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{C}$): Jede beschränkte Folge (z_n) komplexer Zahlen besitzt in $\mathbb{C}$ eine konvergente Teilfolge.

Bew.: Sei $z_n = x_n + iy_n$ mit $x_n, y_n \in \mathbb{R}$.

Ist dann $|z_n| \leq S$, so gilt auch $|x_n| \leq S$ und $|y_n| \leq S$, also sind (x_n) und (y_n) beschränkte Folgen reeller Zahlen. Der Satz von Bolzano-Weierstraß in $\mathbb{R}$ ergibt:

Es ex. $x \in \mathbb{R}$ und eine Teilfolge (x_{n_k}) von (x_n)

mit $\quad x = \lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$

Wir setzen $u_k := x_{n_k}$, so daß $x = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, und

$v_k := y_{n_k}$. Dann ist $|v_k| = |y_{n_k}| \leq S$, also (v_k) ebenfalls beschränkt in $\mathbb{R}$. Eine zweite Anwendung von BW ergibt:

Es ex. $y \in \mathbb{R}$ und eine TF (v_{k_ℓ}) von (v_k), so

daß $\quad y = \lim\limits_{\ell\to\infty} v_{k_\ell}$.

Wir setzen $w_\ell = u_{k_\ell} + i v_{k_\ell}$. Dann ist (w_ℓ) eine Teilfolge von (z_n) mit

$$x + iy = \lim_{\ell\to\infty} u_{k_\ell} + i \lim_{\ell\to\infty} v_{k_\ell} = \lim_{\ell\to\infty} w_\ell,$$

also eine konvergente Teilfolge, wie behauptet.

$\square$

2.5.3 b-adische Entwicklungen

Nochmal die Frage: Was sind die reellen Zahlen?

In den Abschnitten 2.1 bis 2.4 haben wir die reellen Zahlen axiomatisch charakterisiert als einen vollständigen, archimedisch angeordneten Körper, der $\mathbb{Q}$ umfaßt.

Andererseits (Schulwissen, 1. Vorlesung):

$$\mathbb{R} = \{\pm a, a_1 a_2 a_3 \ldots : a \in \mathbb{N}_0, \; a_k \in \{0, \ldots, 9\}, \; k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \text{Menge aller „Dezimalzahlen"}$$

Stimmen beide Auffassungen von $\mathbb{R}$ überein?

Genauer: Definiert jede Dezimaldarstellung

$$x = \pm a, a_1 a_2 \ldots$$

eine reelle Zahl x? Und umgekehrt: Gibt es zu jeder reellen Zahl eine Dezimalbruchentwicklung?

Dazu müssen wir präzisieren, was

$$a, a_1 a_2 a_3 \ldots = ? \qquad (a \in \mathbb{N}_0, \; a_k \in \{0, \ldots, 9\})$$

bedeuten soll. Dies ist unproblematisch für abbrechende Dezimalbruchentwicklungen:

$$x = a, a_1 a_2 \ldots a_N = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{100} + \ldots + \frac{a_N}{10^N}$$

$$= a + \sum_{k=1}^{N} a_k 10^{-k}$$

Zur Vereinfachung schreibt man die ganze Zahl a

ebenfalls ein Zehnersystem, also

$$a = a_0 + a_{-1} \cdot 10 + a_{-2} \cdot 100 + \dots + a_{-M} \cdot 10^M \quad (a_k \in \{0, \dots, 9\})$$

so daß

$$x = \sum_{k=-M}^{N} a_k \cdot 10^{-k} \qquad \text{mit} \quad a_k \in \{0, \dots, 9\}$$

Es ist zwar üblich, aber keineswegs notwendig, die Zahl $b = 10$ als Basis des Stellensystems zu wählen, jede natürliche Zahl $b \geq 2$ kann genausogut verwendet werden.

Def.: Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Dann heißt eine Summe

$$\pm \sum_{k=-M}^{N} a_k \, b^{-k}$$

mit $N \in \mathbb{N}_0$, $M \in \mathbb{Z}$, $-M \leq N$ und $a_k \in \{0, \dots, b-1\}$ ein <u>endlicher b-albruch</u> oder eine <u>abbrechende b-adische Entwicklung</u>.

Bez.: b = Basis (üblich $b \in \{2, 3, 10, 12, 60\}$)

a_k = Ziffern

Eine nicht-abbrechende b-adische Entwicklung wollen wir als Grenzwert von abbrechenden auffassen, dazu müssen wir uns vergewissern, daß dieser Grenzwert existiert.

<u>Lemma 1</u>: Es seien $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, $M \in \mathbb{Z}$ und $(a_k)_{k \geq -M}$ eine Folge mit Werten in $\{0, \dots, b-1\}$ sowie

$$S_N = \sum_{k=-M}^{N} a_k b^{-k} .$$

Dann existiert in $\mathbb{R}$ der Grenzwert $\lim\limits_{N \to \infty} S_N$.

<u>Bew.</u>: $\quad |S_N - S_{N-1}| = a_N b^{-N} \leq (b-1) b^{-N}$.

Satz 2 in A 2.4 liefert: $(S_N)_N$ ist eine Cauchy-Folge, also konvergiert. $\square$

Lemma 1 erlaubt die folgende

<u>Def.</u>: Sei $b \in \mathbb{N}$ mit $b \geq 2$. Dann heißt der Grenzwert

$$\lim_{N \to \infty} \sum_{k=-M}^{N} a_k b^{-k}$$

mit $M \in \mathbb{Z}$ und $a_k \in \{0, \dots, b-1\}$ eine <u>b-adische Entwicklung</u> bzw. ein <u>b-albruch</u>.

<u>Bez.</u>: Gilt für ein $x \in \mathbb{R}$, daß $x = \pm \lim\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{k=-M}^{N} a_k b^{-k}$, so nennen wir diese Darstellung die b-adische Entwicklung von x oder auch die b-albruch-Darstellung von x.

Bemerkungen:

1. Insbes. konvergiert nach Lemma 1 jeder Dezimalbruch gegen eine reelle Zahl. (Damit ist Teil 1 der Eingangsfrage positiv beantwortet.)

2. Durch die Forderung

$$\text{„}a_k \neq b-1 \text{ für unendlich viele } a_k\text{"} \qquad (*)$$

kann man bei gegebenen b und x die Eindeutigkeit der b-albruch-Darstellung erzwingen.

Bew. von 2.: Sei $\lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=-M}^{N} a_k b^{-k} = \lim\limits_{N\to\infty} \sum\limits_{k=-M}^{N} c_k b^{-k}$.

Nehmen wir $a_{k_0} \neq c_{k_0}$ an, wobei k_0 minimal sei mit dieser Eigenschaft, so folgt

$$a_{k_0} - c_{k_0} = b^{k_0} \cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{N} (c_k - a_k)\cdot b^{-k}$$

$$\Rightarrow |a_{k_0} - c_{k_0}| \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=k_0+1}^{N} \underbrace{|c_k - a_k|}_{< b-1 \text{ für mindestens ein } k > k_0 \ (*)} b^{k_0-k}$$

$$< (b-1)\cdot \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} b^{-k}$$

geometrische Summenformel

$$= (b-1)\cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{b}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{b}} = \frac{b-1}{b} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{b}} = 1.$$

Also $|a_{k_0} - c_{k_0}| < 1$ ein Widerspruch zur Annahme $a_{k_0} \neq c_{k_0}$, da beide ganzzahlig sind.

Als nächstes zeigen wir, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine b-adische Entwicklung existiert:

Satz 4: Es seien $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann existieren $M \in \mathbb{Z}$ und eine Folge $(a_k)_{k \geq -M}$ mit Werten in $\{0, \ldots, b-1\}$, so daß
$$x = \pm \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-M}^{N} a_k b^{-k}.$$

Bew. o.E. $x > 0$ (Aussage klar für $x = 0$, für $x < 0$ betrachte $-x$!)

o.E. $x < 1$ (sonst: $\exists\, M \in \mathbb{N}_0$ mit $b^M \leq x < b^{M+1}$ und $\tilde{x} = \frac{x}{b^{M+1}} \in (0,1)$. Aus einer b-al-Bruchentwicklung für $\tilde{x}$ erhält man eine für x durch Multiplikation mit b^{M+1}!)

Wir setzen $a_1 := [x \cdot b]$, $r_1 := x - \frac{a_1}{b}$.

Da $0 < x < 1$ gilt, ist $x \cdot b < b$ und $a_1 = [x b] \in \{0, \ldots, b-1\}$.

Ferner ist $b \cdot r_1 = bx - b \cdot \frac{a_1}{b} = bx - [bx] < 1$.

Als nächstes $a_2 := [r_1 \cdot b^2]$ und $r_2 = r_1 - \frac{a_2}{b^2} = x - \frac{a_1}{b} - \frac{a_2}{b^2}$

Dann ist $r_1 \cdot b^2 < b$, also auch $a_2 \in \{0, \ldots, b-1\}$ und $r_2 \cdot b^2 = r_1 b^2 - [r_1 b^2] < 1$.

Allgemein: $a_n = [r_{n-1} b^n]$, $r_n = r_{n-1} - \frac{a_n}{b^n}$,

so daß stets $a_n \in \{0, \ldots, b-1\}$ und $r_n \cdot b^n < 1$

Insbes. ist dann $0 \leq x - \sum_{k=1}^{N-1} a_k b^{-k} - r_N \leq b^{-N} \to 0$ $(N \to \infty)$.

Also hat man für die oben konstruierte Folge $(a_n)_n$, daß $x = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k b^{-k}$. $\square$

Als nächstes zeigen wir, dass es für jedes $x \in \mathbb{R}$ eine b-adische Entwicklung gibt:

Satz 4: Es seien $b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann existieren $M \in \mathbb{Z}$ und eine Folge $(a_k)_{k \geq -M}$ mit Werten in $\{0, \ldots, b-1\}$, so dass

$$x = \pm \lim_{N \to \infty} \sum_{k=-M}^{N} a_k b^{-k}.$$

Bew.: O.E.: $x > 0$ (Die Aussage ist klar für $x = 0$, für negative x betrachte $-x$.)

O.E.: $x < 1$. (Für $x \geq 1$ ex. $M \in \mathbb{N}$ mit $b^M \leq x < b^{M+1}$. Dann ist $\tilde{x} := \frac{x}{b^{M+1}} \in (0,1)$. Aus der Entwicklung für $\tilde{x}$ erhält man die für x durch Multiplikation mit b^{M+1}.

Wir definieren rekursiv zwei Folgen $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (Koeffizienten) und $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ (Reste) durch

$$a_1 := [x b] \qquad r_1 := x - \frac{a_1}{b}$$

$$a_{n+1} := [r_n b^{n+1}] \qquad r_{n+1} := r_n - \frac{a_{n+1}}{b^{n+1}}.$$

Hierfür zeigen wir ~~induktiv~~: $r_n \cdot b^{n+1} \in [0, b)$ und daher $a_n \in \{0, \ldots, b-1\}$:

$n = 1$: $\quad r_1 \cdot b = xb - a_1 = xb - [xb] \in [0,1) \leadsto r_1 \cdot b^2 \in [0,b)$

$$\cancel{n \to n+1: \quad r_{n+1} \cdot b^{n+1} \underset{Def.}{=} r_n \cdot b^{n+1} - a_{n+1} \underset{Def.}{=} r_n b^{n+1} - [r_n b^{n+1}]}$$

$$\cancel{\in [0,1) \Rightarrow r_{n+1} b^{n+2} \in [0,b)}$$

$n \geq 2$: $\quad r_n \cdot b^n \underset{Def.}{=} r_{n-1} \cdot b^n - a_n \underset{Def}{=} r_{n-1} b^n - [r_{n-1} b^n] \in [0,1)$

$$\Rightarrow r_n \cdot b^{n+1} \in [0, b).$$

Für die Reste haben wir dann einerseits

$$r_N \cdot b^N \in [0,1), \text{ also } 0 \le r_N < \frac{1}{b^N} \to 0 \quad (N \to \infty)$$

und andererseits

$$r_N = r_{N-1} - \frac{a_N}{b^N} = r_{N-2} - \frac{a_{N-1}}{b^{N-1}} - \frac{a_N}{b^N} = \dots = x - \sum_{k=1}^{N} a_k b^{-k}$$

und also $\quad x = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} a_k b^{-k}$.

Bem.: 1. Insbesondere existiert zu jedem $x \in \mathbb{R}$ eine Dezimalbruchentwicklung. Die beiden Auffassungen von $\mathbb{R}$ stimmen also überein!

2. $\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$, d.h.: Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert eine Folge (q_k) rationaler Zahlen mit $x = \lim_{k \to \infty} q_k$.

3. $(a_n) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \dots\right)$. Dann ist $H((a_n)) = [0,1]$. Denn ist $x \in [0,1]$ vorgegeben, so ex. nach 2. eine Folge (q_k) in $\mathbb{Q} \cap (0,1)$ mit $q_k \to x$. Jedes $q \in \mathbb{Q} \cap (0,1)$ taucht unendlich oft in (a_n) auf, also können wir eine TF (a_{n_k}) von (a_n) auswählen mit $a_{n_k} = q_k$.

10.05.19

Ggf. als Ergänzung zu Satz 4 (in 2.5)

$\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$ im 7er-System

$x = \frac{1}{6} \in (0,1)$

$a_1 = [x \cdot 7] = [\frac{7}{6}] = 1 \qquad r_1 = x - \frac{a_1}{7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \cancel{7-6} \cdot (\frac{7}{6} - 1) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$

$a_2 = [r_1 \cdot 7^2] = [\frac{7}{6}] = 1 \qquad r_2 = r_1 - \frac{a_2}{7^2} = \frac{1}{7^2}(7-6$

$a_1 = [x \cdot 7] = [\frac{7}{6}] = 1 \qquad r_1 = x - \frac{a_1}{7} = \frac{1}{6} - \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}(7-6) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6}$

$a_2 = [r_1 \cdot 7^2] = [\frac{7}{6}] = 1 \qquad r_2 = r_1 - \frac{a_2}{7^2} = \frac{1}{7^2}(\frac{7}{6} - 1) = \frac{1}{7^2} \cdot \frac{1}{6}$

allgemein: $\quad a_n = 1 \qquad r_n = \frac{1}{7^n} \cdot \frac{1}{6}$

d.h. $\quad \frac{1}{6} = 0{,}111\ldots = 0{,}\overline{1}$ im 7er-System,

und allgemein kann man feststellen, dass

$\frac{1}{b-1} = 0{,}\overline{1}$ im b-adischen System.

Sehr einfach ist jetzt $x = \frac{1}{3} = 2 \cdot \frac{1}{6} = 2 \cdot 0{,}\overline{1} = 0{,}\overline{2}$,

während wir ~~für~~ noch einmal etwas tun müssen für

$x = \frac{1}{4} \in (0,1)$

$a_1 = [x \cdot 7] = [\frac{7}{4}] = 1 \qquad r_1 = x - \frac{a_1}{7} = \frac{1}{4} - \frac{1}{7} = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{4}(7-4)$

$= \frac{1}{7} \cdot \frac{3}{4}$

$a_2 = [r_1 \cdot 7^2] = [\frac{21}{4}] = 5 \qquad r_2 = r_1 - \frac{a_2}{7^2} = \frac{1}{7^2}(\frac{21}{4} - \frac{20}{4}) = \frac{1}{7^2} \cdot \boxed{\frac{1}{4}}$

hier sind wir schon wieder am Anfang angekommen und haben

$\frac{1}{4} = 0{,}\overline{15}$ im 7er-System

2.5.4 Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$

Def.: Eine Menge $A \neq \emptyset$ heißt <u>abzählbar</u>, wenn es eine surjektive Abbildung

$$\varphi : \mathbb{N} \to A$$

gibt. Existiert keine solche Abbildung, heißt A <u>überabzählbar</u>.

Bem.: Ist φ bijektiv, sprechen wir von einer <u>Abzählung</u> von A.

Bsp. 1. $\mathbb{N}$ ist abzählbar ($\varphi = \mathrm{Id}$).

2. A abzählbar, $A' \subset A$, $A' \neq \emptyset$. Dann ist auch A' abzählbar. (Wähle $a_0 \in A'$ und setze

$$\psi(n) := \begin{cases} a_0, & \text{falls } \varphi(n) \notin A' \\ \varphi(n) & \text{sonst,} \end{cases}$$

hierbei $\varphi : \mathbb{N} \to A$ die Surjektion, die nach Voraussetzung existiert.)

3. $\mathbb{Z}$ ist abzählbar, eine Abzählung ist z.B. gegeben durch

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto \varphi(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{für gerades } n \\ \frac{1-n}{2} & \text{" ungerades } n. \end{cases}$$

4. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist überabzählbar, denn allgemein gilt:
Ist M eine Menge und $\varphi : M \to \mathcal{P}(M)$ eine Abbildung, so ist φ nicht surjektiv.

Ann. doch. Dann ex. $x_0 \in M$ mit $\varphi(x_0) = \{x \in M : \varphi(x) \not\ni x\}$. Ist dann $x_0 \in \varphi(x_0)$, so folgt aus der Def. der Menge $x_0 \notin \varphi(x_0)$ und umgekehrt. Also $x_0 \in \varphi(x_0) \iff x_0 \notin \varphi(x_0)$. Widerspruch.

Satz 5: Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge abzählbarer Mengen, so ist auch $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ abzählbar.

Bew.: Sei $A_n = \{a_{nm} : m\in\mathbb{N}\}$. Dann können wir $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ schreiben als

$$\begin{array}{cccccccc}
a_{11}\ (1) & a_{12}\ (2) & a_{13}\ (4) & a_{14}\ (7) & a_{15}\ (11) \ \dots & & a_{1m} \dots & A_1 \\
a_{21}\ (3) & a_{22}\ (5) & a_{23}\ (8) & a_{24} & \dots & & a_{2m} \dots & A_2 \\
a_{31}\ (6) & a_{32}\ (9) & a_{33}\ (k) & \dots & & & a_{3m} \dots & A_3 \\
a_{41}\ (10) & a_{42}\ (k+1) & \dots & & & & a_{4m} \dots & A_4 \\
a_{51} & \dots & & & & & a_{5m} \dots & A_5 \\
\vdots & & & & & \vdots & & \vdots
\end{array}$$

Dies definiert eine surjektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $\square$

Folgerungen:

1. $\mathbb{N}^2 = \{(n,m) : n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N}\} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \{(n,m) : m\in\mathbb{N}\}$

und

2. $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}\} = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}} \{\frac{p}{q} : p\in\mathbb{Z}\}$

sind abzählbar.

In den Kategorien "abzählbar >—< überabzählbar" ist $\mathbb{R}$ jedoch viel größer bzw. "mächtiger" als $\mathbb{Q}$. Um dies einzusehen, benutzt man seit Cantor die Dezimalbruchentwicklungen.

<u>Satz 6</u>: Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

<u>Bew.</u>: Es reicht zu zeigen, daß $(0,1)$ überabzählbar ist. Wir nehmen die Existenz einer Abzählung an und schreiben die Dezimalbruchdarstellungen untereinander:

$$x_1 = 0{,}\, x_{11}\, x_{12}\, x_{13}\, x_{14} \ldots$$
$$x_2 = 0{,}\, x_{21}\, x_{22}\, x_{23}\, x_{24} \ldots$$
$$x_3 = 0{,}\, x_{31}\, x_{32}\, x_{33}\, x_{34} \ldots$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

mit $x_{ik} \in \{0, \ldots, 9\}$, wobei bei festem i unendlich viele $x_{ik} \neq 9$ seien, so daß die Darstellung eindeutig ist und alle x_i verschieden sind.

$a := 0{,}\, a_1 a_2 a_3 \ldots$ mit

$$a_k = \begin{cases} 4 & \text{falls } x_{kk} \neq 4 \\ 5 & \text{falls } x_{kk} = 4 \end{cases}$$

Dann stimmt a mit keinem der „abgezählten" Dezimalbrüche überein, also $a \notin \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$, obwohl $a \in (0,1)$ ist. Widerspruch zur Annahme. $\square$

<u>Folgerung</u>: Jedes Intervall $(0, \varepsilon)$ mit $\varepsilon > 0$ ist überabzählbar, denn

$$f : (0,1) \longrightarrow (0, \varepsilon), \quad x \longmapsto \varepsilon x$$

ist bijektiv.