1.2 Die natürlichen Zahlen und das Induktionsprinzip

Wenn wir die natürlichen Zahlen in der üblichen Form

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

ausschreiben, bedeuten die ...., daß es einen wohldefinierten Zählvorgang gibt, der jeder natürlichen Zahl in eindeutiger Weise einen Nachfolger zuordnet. Dies ist die wesentliche charakterisierende Eigenschaft der natürlichen Zahlen. Mit Hilfe der Grundbegriffe "Menge" und "Abbildung" können wir die natürlichen Zahlen in folgender Weise vollständig charakterisieren:

Axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen (Dedekind, 1888; Peano, 1889): Die natürlichen Zahlen bilden eine Menge $\mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(P1) Es gibt ein Element $1 \in \mathbb{N}$.

(P2) Es gibt eine Abbildung $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, so daß

(P3) $1 \notin \nu(\mathbb{N})$,

(P4) ν ist injektiv,

(P5) ist $M \subset \mathbb{N}$ mit $1 \in M$ und $\nu(M) \subset M$, so gilt bereits $M = \mathbb{N}$.

("Peano-Axiome" der natürlichen Zahlen)

Die Abbildung ν wird als Nachfolgerabbildung bezeichnet. Dieser beginnt mit 1 (P3), und (P4) sagt aus, daß keine Zahl dabei mehr als einmal erreicht wird. Schließlich umfaßt das Axiom (P5) die Aussage, daß jede natürliche Zahl durch den Zählvorgang erfaßt wird.

Durch die Axiome (P1) bis (P5) sind die natürlichen Zahlen im wesentlichen (d.h. "bis auf Isomorphie") eindeutig festgelegt. Genauer gilt der folgende

<u>Eindeutigkeitssatz</u> (Dedekind, 1888): Ist $\mathbb{N}'$ eine Menge mit einem ausgezeichneten Element $1' \in \mathbb{N}'$ und einer Abb. $\nu' : \mathbb{N}' \to \mathbb{N}'$, die die Axiome (P3) bis (P5) erfüllt, so existiert eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}'$ mit $\varphi(1) = 1'$ und $\varphi \circ \nu = \nu' \circ \varphi$. (Ebbinghaus u.a., Zahlen, Kap 1, §2)

(Die Abbildung φ wird als Isomorphismus bezeichnet, das bedeutet "strukturerhaltende Abbildung.)

Aufgrund dieses Eindeutigkeitssatzes können wir von axiomatischer Charakterisierung der natürlichen Zahlen sprechen. In ähnlicher Weise sollen in den nächsten Abschnitten die reellen Zahlen eingeführt werden. = 13.04.

Die Peano-Axiome der natürlichen Zahlen, insbesondere das Axiom (P5), sind noch aus einem zweiten Grund für die Analysis relevant. Sie liefern nämlich ein äußerst nützliches Beweisverfahren, den Induktionsbeweis.

Um dies zu erläutern, schreiben wir $\nu(n)=n+1$. Dann lautet das sogenannte Induktionsaxiom (P5) folgendermaßen:

(P5') Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Menge mit $1 \in M$ und der Eigenschaft $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$, so gilt $M = \mathbb{N}$.

Sei nun $A(n)$ eine Aussage, die von einem Parameter $n \in \mathbb{N}$ (ggf. auch $n \in \mathbb{Z}$) abhängt, z. B.:

$A(n)$: Die Summe der ersten n natürlichen Zahlen beträgt $\frac{1}{2}n(n+1)$, in Zeichen:
$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$, wobei $\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+\ldots+n$ ist.

oder

$B(n)$: Jede natürliche Zahl n läßt sich als Produkt von Primzahlen darstellen. (Existenz einer "Primfaktorzerlegung")

Um derartige Aussagen zu beweisen, können wir
auf die nachstehende Folgerung aus dem Induktionsaxiom (P5') zurückgreifen:

Satz (Induktionsprinzip, 1. Version): Es sei $n_0 \in \mathbb{Z}$ und für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n \geq n_0$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Hierfür gelte:

1. $A(n_0)$ ist richtig,

2. $\forall n \geq n_0 : A(n) \Rightarrow A(n+1)$.

Dann gilt $A(n)$ für alle $n \geq n_0$.

Bew.: Wende (P5') an auf $M = \{n \in \mathbb{N} : A(n+n_0-1)$ ist richtig$\}$.

Die Anwendung dieses Prinzips soll an zwei Beispielen erläutert werden:

Bsp. 1: $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$ $\quad (A(n))$

Bew.: (i) Für $n=1$ haben wir einerseits $\sum_{k=1}^{1} k = 1$, andererseits $\frac{1}{2} \cdot 1(1+1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Also stimmt die Aussage für $n=1$. ("Induktionsanfang")
(ii) Wir nehmen die Gültigkeit von $A(n)$ an, hier $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1)$. (Das ist die sog. Induktionsvoraussetzung.) Daraus folgern wir die Gültigkeit von $A(n+1)$, im vorliegenden Bsp. geschrieben

das folgendermaßen:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n(n+1) \Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} k = \sum_{k=1}^{n} k + n+1 = \frac{1}{2} n(n+1) + n+1$$

$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2),$$ und damit ist $A(n+1)$ gezeigt.

Dieser zweite Schritt wird als Induktionsschluß oder auch als Induktionsschritt bezeichnet.

Bsp. 2: Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge

Um hier eine Aussage $A(n)$ formulieren zu können, benötigen wir zunächst einige Bezeichnungen:

Def.: Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Fakultät durch

$$n! := \prod_{k=1}^{n} k := 1 \cdot 2 \cdot \_\_ \cdot n.$$

Ferner setzen wir $0! := 1$.

(Bsp. $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2 = 2$, $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ usf.)

Def.: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq k \leq n$ heißt die Zahl

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

der Binomialkoeffizient. Ferner wird die Konvention

$\binom{n}{k} = 0$ für $k < 0$ und $k > n$ vereinbart.

(Bem.: Unmittelbar aus der Definition folgt die Symmetrieeigenschaft $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.)

Lemma 1: Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, \dots, n+1\}$ gilt

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Bew.: Klar für $k=0$ und für $k=n+1$. Für $k \in \{1, \dots, n\}$ haben wir

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n+1-k)!}\,(n+1-k+k) = \frac{(n+1)!}{k!\,(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k} \quad \square$$

Kommen wir zurück zur Anzahl der Teilmengen:

Satz: Die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge beträgt $\binom{n}{k}$.

(Hierbei: $n \in \mathbb{N}_0$, $0 \le k \le n$.)

Bew. per Induktion über n, beginnend mit $n=0$:

Induktionsanfang: $n=0$. Die leere Menge hat nur sich selbst als Teilmenge, sie hat Null Elemente. Also: Die Anzahl der nullelementigen Teilmengen einer nullelementigen Menge beträgt $1 = \binom{0}{0}$.

Induktionsschluß: $n \to n+1$. Sei $M_{n+1} = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ und $M_n = \{a_1, \dots, a_n\}$.

Für $k=0$ kommt wieder nur die leere Menge als Null-($=k$-) elementige Teilmenge von M_{n+1} in Frage, und es gilt $\binom{n+1}{0} = 1$. Betrachte also $k \in \{1, \dots, n+1\}$:

Hierfür haben wir

$$\# \{ M \subset M_{n+1} : \# M = k \}$$

$$= \# \{ M \subset M_n : \# M = k \} + \# \{ M \subset M_{n+1} : \# M = k \text{ und } a_{n+1} \in M \}$$

$$= \binom{n}{k} + \# \{ M' \subset M_n : \# M' = k-1 \} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Jetzt folgt die Rel. aus Lemma 1. $\square$

Folgerung: $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}_0$.

Die erste Version des Induktionsprinzips erlaubt es noch nicht (ohne weiteres), die Aussage über die Existenz einer Primfaktorzerlegung zu beweisen. Die Aussage für den direkten Vorgänger, den die Induktionsvoraussetzung liefert, ist hierfür allein nicht ausreichend. Wir beweisen die folgende allgemeinere Variante:

Satz (Induktionsprinzip, 2. Version): Ist $M \subset \mathbb{N}$ eine Teilmenge mit

(i) $1 \in M$,

(ii) $\{1, \dots, n\} \in M \Rightarrow n+1 \in M$.

Dann ist bereits $M = \mathbb{N}$.

Bew.: $\tilde{M} := \{ n \in \mathbb{N} : \{1, \dots, n\} \subset M \}$. Dann ist $1 \in \tilde{M}$ und

$n \in \tilde{M} \Rightarrow \{1, \dots, n\} \in M \underset{(ii)}{\Rightarrow} n+1 \in M$, also $\{1, \dots, n+1\} \subset M$

$\Rightarrow n+1 \in \tilde{M}$. Nach der 1. Variante des Induktionsprinzips ist also $\tilde{M} = \mathbb{N}$. Damit $\{1, \dots, n\} \subset M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich $M = \mathbb{N}$. $\square$

Hieraus ergibt sich:

Folgerung: Ist $A(n)$ eine Aussage, so daß gilt

(i) Es ex. $n_0 \in \mathbb{Z}$ und $A(n_0)$ ist richtig,

(ii) $A(n_0), \dots, A(n) \Rightarrow A(n+1) \; \forall n \geq n_0$.

Dann ist $A(n)$ richtig für alle $n \geq n_0$.

(Wende die "2. Version" an auf $M = \{n \in \mathbb{N} : A(n+n_0-1)\}$.)

Damit ist die Gültigkeit von $\mathcal{B}(2)$ leicht zu zeigen:

Forts. Bsp.: $\mathcal{B}(2)$ ist richtig: $2=2$ ist eine Primfaktorzerlegung. (Dies ist der Ind.-anfang.)

Ind.-Schluß: Ist $n+1$ prim, so ist $n+1=n+1$ eine Primfaktorzerlegung. Andernfalls existieren $p = p_1 \cdots p_\ell$ und $q = q_1 \cdots q_k$ mit Primzahlen $p_1, \dots, p_\ell, q_1, \dots, q_k$, so daß

Hier geht die Induktionsvoraussetzung für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$ mit $p, q \leq n$ ein!

$$n+1 = p \cdot q = p_1 \cdots p_\ell \cdot q_1 \cdots q_k,$$

und damit ist eine Primfaktorzerlegung von $n+1$ gefunden. $\square$

Abschließende Bem. zur Induktion: Häufig werden sog. Folgen von Zahlen (oder auch anderen Objekten) rekursiv definiert durch

$x_0 = a_0, x_1 = a_1, \dots, x_m = a_m$ (die a_i werden fest vorgegeben)

und eine Vorschrift $x_{n+1} = f(x_n, \dots, x_{n-m})$, wobei $n \geq m$.

Daß dadurch tatsächlich x_n für alle natürlichen Zahlen n definiert ist, beruht auf dem Induktionsprinzip. Bsp.: $x_0 = 1$, $x_{n+1} = (n+1) \cdot x_n$ liefert die Fakultät, $x_0 = 0, x_1 = 1$, $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ die sog. Fibonacci-Zahlen.