1. Grundlagen

1.1 Mengen und Abbildungen

Von fundamentaler Bedeutung sowohl für die Analysis wie auch für die Algebra ist der Begriff der <u>Menge</u>. Er wurde 1895 von Georg Cantor folgendermaßen eingeführt:

<u>Def.</u> (Menge, Element): "Unter einer <u>Menge</u> verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die <u>Elemente</u> von M genannt werden) zu einem Ganzen."

(Cantor, 1895)

Dies ist keine exakte Definition, denn sie enthält Begriffe wie "Zusammenfassung" und "Objekt", die nicht genauer festgelegt sind. Ferner führt sie zu Widersprüchen, wie wir bald anhand eines einfachen Beispiels sehen werden. Um zumindest die größten Schwierigkeiten aus dem Weg zu räumen, fügen wir hinzu:

<u>Zusatz</u> zur Def.: Hierbei muß prinzipiell entscheidbar sein, ob ein Element m zu einer Menge M gehört oder nicht.

Bez.: Wir schreiben $m \in M$ (gelesen: 'm Element M'), wenn das Objekt m zur Menge M gehört, andernfalls $m \notin M$.

Es gibt zwei Möglichkeiten der Beschreibung von Mengen:

1. Durch Aufzählung, z.B.:

sog. "Mengenklammern"

$$M_1 = \{2,4,6,8\} \qquad \text{oder} \qquad M_2 = \{7, X, \Delta, !\};$$

es können also durchaus verschiedenartige Objekte zu einer Menge zusammengefasst werden. Auf die Reihenfolge kommt es hierbei nicht an und in der Regel wird jedes Objekt nur einmal genannt (beachte: "wohlunterschieden" in Cantors Def.!). Wir haben also

$$M_1 = \{4,8,6,2\} = \{2,4,2,6,8\}.$$

Diese Art der Beschreibung ist in erster Linie geeignet für endliche Mengen, das sind Mengen mit endlich vielen Elementen. Aber auch

$$M_3 = \{2,4,6,8,\ldots\}$$

ist eine zulässige Beschreibung der Menge aller geraden natürlichen Zahlen. Es kommt dabei darauf an, dass ein Bildungsgesetz eindeutig erkennbar ist.

2. Durch Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft $E(x)$, allgemein in der Form

$$M = \{x : E(x)\},$$

was man lesen würde als "Menge aller Objekte x mit der Eigenschaft E". z.B. haben wir

$$M_1 = \{x : x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl, die kleiner ist als } 10\}$$

oder

$$M_3 = \{x : x \text{ ist eine gerade natürliche Zahl}\}.$$

Vorsicht! Nicht jede Angabe einer charakterisierenden Eigenschaft führt zu einer wohldefinierten Menge.

Bsp. ("Russell'sche Unmenge"): Die Menge

$$M_R \overset{\text{definierende Gleichheit}}{:=} \{x \mid x \text{ ist Menge und } x \notin x\}$$

aller Mengen, die sich selbst als Element nicht enthalten ist zweifellos eine "Zusammenfassung von Objekten unseres Denkens", genügt also der Cantor'schen Mengendefinition. Aber: Gehört M_R als Element zu M_R, d.h.: Gilt $M_R \in M_R$?

Nehmen wir dies an, folgt sofort das Gegenteil:

$$M_R \in M_R = \{x : x \notin x\} \overset{\text{"daraus folgt", impliziert}}{\Longrightarrow} M_R \notin M_R$$

Umgekehrt: $M_R \notin M_R = \{x \mid x \notin x\} \Longrightarrow M_R \in M_R$.

Die Frage "$M_R \in M_R$?" ist also nicht entscheidbar.

Dies motiviert den oben formulierten Zusatz zur Cantor-schen Definition.

Hingegen ist

$M_4 := \{x : x \text{ ist eine Primzahl}\}$

eine wohldefinierte Menge, auch wenn heute (noch) niemand entscheiden kann, ob z.B. $2^{99991}-1$ eine Primzahl ist oder nicht. Es ist prinzipiell entscheidbar, M_4 genügt damit dem Zusatz zur Definition. Die Menge aller Primzahlen ist wohldefiniert.

Das Bsp. der Russell'schen Unmenge zeigt: Probleme mit dem sog. "naiven" Cantor'schen Mengenbegriff treten dann auf, wenn man Mengen von Mengen untersucht. Hat man es mit Mengen gleichartiger Objekte (z.B. mit Zahlenmengen) zu tun, so treten derartige Schwierigkeiten nicht auf.

11.04.

Beispiele von Zahlenmengen, die in der Analysis I von Bedeutung sind:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (natürliche Zahlen)
- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ (natürliche Zahlen mit 0)
- $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ (ganze Zahlen)
- $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ (rationale Zahlen)
- $\mathbb{R} = \{a, a_0 a_1 \dots : a \in \mathbb{Z}, a_0, a_1, \dots \in \{0, \dots, 9\}\}$ (reelle Zahlen; $\hat{=}$ Dezimalbrüchen, später genauer!)

- Intervalle: Für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ definiert man

$$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \quad \text{(abgeschlossen)}$$

$$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \quad \text{(offen)}$$

$$\left.\begin{array}{l} [a,b) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ (a,b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \end{array}\right\} \quad \text{(halboffen)}$$

sowie uneigentliche ($\hat{=}$ "unendlich ausgedehnte") Intervalle wie z.B.

$$[a,\infty) := \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \quad \text{oder}$$

$$(-\infty, b) := \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$$

<u>Bem.</u>: (i) Das Symbol <u>∞</u> für "unendlich" ist <u>keine reelle Zahl</u>! Die <u>Rechenregeln</u> für reelle Zahlen sind für dieses Symbol <u>nicht anwendbar</u>!

(ii) Die Ordnungsrelationen $<$ und $\leq$ zwischen zwei reellen Zahlen werden wir später genauer fassen.

Bei dieser Aufzählung von Zahlenmengen, insbes. bei den Intervallen haben wir in gewisser Weise den folgenden Begriff der Teilmenge vorweggenommen:

Def. (Teilmenge, Mengengleichheit und leere Menge):

(i) Eine Menge M_1 heißt Teilmenge einer Menge M_2, falls alle Elemente von M_1 in M_2 enthalten sind.

Schreibweise: $M_1 \subset M_2$, falls gilt: $x \in M_1 \Rightarrow x \in M_2$

Teilmenge, enthalten

daraus folgt, dies impliziert

(ii) Zwei Mengen M_1 und M_2 heißen gleich, wenn sie die gleichen Elemente enthalten. Kurz:

$$M_1 = M_2 \;:\Leftrightarrow\; M_1 \subset M_2 \text{ und } M_2 \subset M_1$$

definiert als

genau dann, wenn
ist äquivalent zu
engl.: if and only if (iff)

(iii) Die leere Menge ist diejenige Menge, welche kein Element enthält. Sie wird mit $\emptyset$ (oder $\{\}$) bezeichnet.

Bem.: Für jede Menge M gilt $\emptyset \subset M$.

Def. (Mengenverknüpfungen): M_1 und M_2 seien Mengen. Dann heißen:

(i) $M_1 \cup M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ oder } x \in M_2\}$ die Vereinigung,

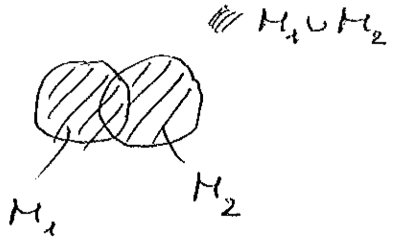
(ii) $M_1 \cap M_2 := \{x \mid x \in M_1 \text{ und } x \in M_2\}$ der (Durch-)Schnitt

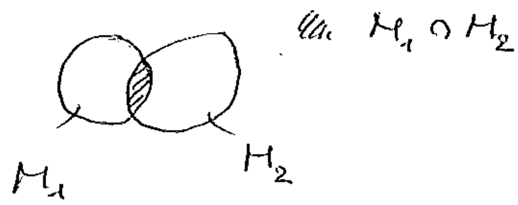
(iii) $M_1 \setminus M_2 := \{x : x \in M_1 \text{ und } x \notin M_2\}$ die Differenz un

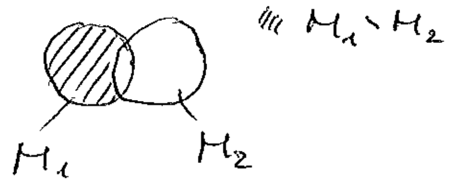
(iv) $M_1 \triangle M_2 := (M_1 \setminus M_2) \cup (M_2 \setminus M_1)$ die symmetrische Differenz der Mengen M_1 und M_2.

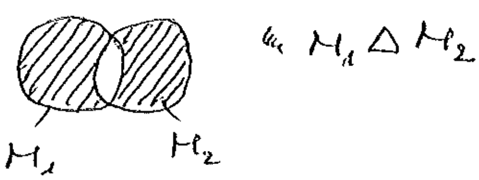
Bem.: • Ohne den Begriff der leeren Menge hätten wir den Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ nicht für beliebige Mengen M_1 und M_2 definieren können. Zwei Mengen mit der Eigenschaft $M_1 \cap M_2 = \emptyset$ nennt man <u>disjunkt</u>.

• Diese Mengenoperationen können durch sog. <u>Venn-Diagramme</u> veranschaulicht werden:

(i) 

(ii) 

(iii) 

(iv) 

Solche Diagramme sind oft nützlich, haben aber keine Beweiskraft.

<u>Satz 1</u> (Rechenregeln für Mengenverknüpfungen): M_1, M_2 und M_3 seien Mengen. Dann gelten:

(i) $M_1 \cup M_2 = M_2 \cup M_1$; $M_1 \cap M_2 = M_2 \cap M_1$ (Kommutativität)

(ii) $M_1 \cup (M_2 \cup M_3) = (M_1 \cup M_2) \cup M_3$, desgl. für $\cap$ (Assoziativität)

(iii) $$\left.\begin{aligned} M_1 \cap (M_2 \cup M_3) &= (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3) \\ M_1 \cup (M_2 \cap M_3) &= (M_1 \cup M_2) \cap (M_1 \cup M_3) \end{aligned}\right\} \text{(Distributivität)}$$

Exemplarisch soll der Beweis des ersten Distributivgesetzes
durchgeführt werden:

$$x \in M_1 \cap (M_2 \cup M_3) \iff x \in M_1 \text{ und } x \in M_2 \cup M_3$$

$$\iff x \in M_1 \text{ und } (x \in M_2 \text{ oder } x \in M_3)$$

$$\iff (x \in M_1 \text{ und } x \in M_2) \text{ oder } (x \in M_1 \text{ und } x \in M_3)$$

$$\iff x \in M_1 \cap M_2 \text{ oder } x \in M_1 \cap M_3 \iff x \in (M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3).$$

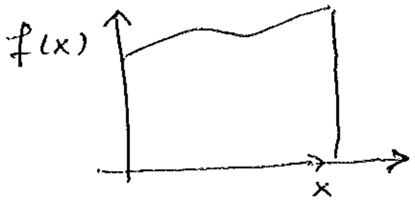
Also enthalten $M_1 \cap (M_2 \cup M_3)$ und $(M_1 \cap M_2) \cup (M_1 \cap M_3)$ dieselben Elemente und sind daher gleich. $\square$

Beweisende.

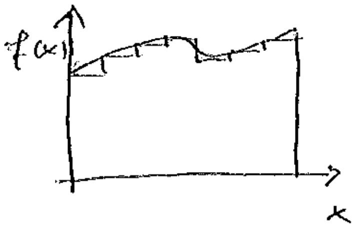
Neben Mengen von Zahlen bzw. allgemeiner Mengen gleichartiger Objekte aus einer wohldefinierten Grundmenge werden wir aber bereits in der Analysis I Mengen von Mengen betrachten.

Bsp.: (i) Approximation einer reellen Zahl x durch eine Folge von Intervallen: $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \ni x$.
Hier betrachtet man also eine Menge von Intervallen. Wenn im Durchschnitt aller Intervalle (s.u.) nur die Zahl x übrigbleibt, spricht man von einer "Intervallschachtelung".

(ii) Approximative Berechnung von Flächen bei der Integration



wird approximiert durch endliche Vereinigung von Rechtecken



Auch hier werden Mengen von Mengen (bzw. Folgen von Mengen) zur näherungsweisen Berechnung benutzt. Wir haben anhand der Russell'schen Unmenge gesehen, das gerade solche Mengen von Menge zu Widersprüchen führen können!

<u>Ausweg</u>: Man zeichnet eine wohldefinierte Grundmenge X aus und betrachtet Mengen von Teilmengen von X, sog. Mengensysteme.

<u>Def.</u> (Potenzmenge, Mengensystem): Es sei X eine Menge. Dann heißt (die Menge aller Teilmengen von X)

$$\mathcal{P}(X) := \{ M : M \subset X \}$$

die <u>Potenzmenge</u> von X. Eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{M} \neq \emptyset$ heißt ein <u>Mengensystem</u> auf X.

<u>Bsp.</u>: (i) $X = \{1,2,3\}$. Dann ist

$$\mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{3,1\}, \{1,2,3\} \}.$$

(ii) $X = \emptyset \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset\} \quad (\neq \emptyset!)$

<u>Übung</u>: Wieviele Elemente hat $\mathcal{P}(X)$, wenn X N Elemente besitzt? — Diese Frage werden wir in einer der nächsten Sitzungen beantworten können.

Wenn eine Grundmenge ausgezeichnet ist, kann man die Komplemente ihrer Teilmengen definieren: 1.1

Def.: X sei eine Menge und $M \subset X$ eine Teilmenge. Dann heißt $M^c := X \setminus M$ das <u>Komplement von M in X</u>.

Bisher haben wir nur endliche Vereinigungen und Durchschnitte betrachtet. Dies können wir jetzt in der folgenden Weise verallgemeinern:

Def.: Es seien X eine Menge und $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf X. Dann setzen wir

$$\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \in X : \text{es gibt ein } M \in \mathcal{M} \text{ mit } x \in M\}$$

und

$$\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M := \{x \in X : x \in M \text{ für alle } M \in \mathcal{M}\}.$$

Bez.: Ist $\mathcal{M} = \{M_i : i \in I\}$ mit einer sogenannten Indexmenge I, so schreibt man $\bigcup_{i \in I} M_i := \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M$ bzw. $\bigcap_{i \in I} M_i := \bigcap_{M \in \mathcal{M}} M$. Am häufigsten verwendet man $\mathbb{N}$ als Indexmenge, aber auch „größere" Indexmengen I sind mitunter erforderlich.

Der Zusammenhang zwischen Durchschnitt und Vereinigung einerseits und der Komplementbildung andererseits wird durch die de Morgan'schen Regeln hergestellt:

Satz 2 (de Morgan): Es sei $\mathcal{M}$ ein Mengensystem auf einer Menge X. Dann gelten:

(i) $\left(\bigcup_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcap_{M\in\mathcal{M}} M^c$; (ii) $\left(\bigcap_{M\in\mathcal{M}} M\right)^c = \bigcup_{M\in\mathcal{M}} M^c$

(Bew. als ÜA!)

Eine weitere wichtige Konstruktion neuer Mengen aus bekannten erhält man mit dem „kartesischen Produkt", benannt nach René Descartes (auch: Renatus Cartesius, 1596–1650), dem Begründer der analytischen Geometrie.

Def. (Kartesisches Produkt): X und Y seien Mengen. Dann heißt

$$X \times Y := \{(x,y) : x \in X,\, y \in Y\}$$

das <u>kartesische Produkt</u> von X und Y. Seine Elemente werden als <u>geordnete Paare</u> bezeichnet.

Bem.: (i) Geordnet bedeutet, dass i. allg. $(x,y) \neq (y,x)$. Im Gegensatz zur Aufzählung von Mengen kommt es hier also auf die Reihenfolge an!

(ii) Es gilt $(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow x = x'$ und $y = y'$.

(iii) Verallgemeinerung: Sind $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Mengen, so heißt

$$\bigtimes_{i=1}^{n} X_i := \{ (x_1, \ldots, x_n) : x_i \in X_i \text{ für alle } i \in \{1, \ldots, n\} \}$$

das kartesische Produkt von X_1 bis X_n. Seine Elemente werden als n-Tupel bezeichnet (im Fall $n=3$ als Tripel).

Wir kommen jetzt zum zentralen Begriff der Abbildung oder Funktion:

<u>Def.</u> (Abbildung / Funktion)(*): Gegeben seien zwei Mengen X und Y. Unter einer <u>Abbildung</u> oder <u>Funktion</u> f von X nach Y versteht man eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ genau ein Element $y = f(x) \in Y$ zuordnet.

Bezeichnungen und Bemerkungen:

(i) Die Menge X in dieser Def. heißt der <u>Definitionsbereich</u> der Abbildung f, die Menge Y ihr <u>Zielbereich</u> (i. allg. $\neq$ Wertebereich!, s.u.)

(*) In dieser Vorlesung verwenden wir diese Begriffe synonym.

(ii) Eine Abbildung wird erst vollständig charakterisiert durch Angabe von Definitionsbereich, Zielbereich und Zuordnungsvorschrift, üblicherweise in der Form

$$f : X \longrightarrow Y, \quad x \longmapsto f(x) \quad (= \ldots \text{ Zuordnungsvorschrift})$$

Abbildungen mit gleicher Zuordnungsvorschrift aber unterschiedlichem Definitions- und/oder Zielbereich können sich in wesentlichen Eigenschaften unterscheiden!

(iii) Die Teilmenge $G_f := \{(x, f(x)) : x \in X\}$ von $X \times Y$ heißt der <u>Graph</u> der Abbildung f.

(iv) Kritisch betrachtet ist die oben gegebene Definition insofern unvollständig, als der Begriff Abbildung durch den nicht präzisierten Begriff der Zuordnung erklärt wird. Dies läßt sich vermeiden, indem man nicht zwischen der Abbildung und ihrem Graphen unterscheidet und zur Definition das kartesische Produkt heranzieht.

Def (Abbildung, 2. Versuch): Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist eine Teilmenge $G_f \subset X \times Y$, so daß zu jedem $x \in X$ genau ein $y \in Y$ mit $(x, y) \in G_f$ existiert. Dieses Element $y \in Y$ wird als $f(x)$ bezeichnet.

(Mit dieser Definition wird der Begriff der Abbildung logisch einwandfrei auf den Mengenbegriff zurückgeführt, sie ist jedoch umständlich zu handhaben. Wir benutzen daher zumeist die erstgenannte Definition.)

Def. (Bild und Urbild): Es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung, $M \subset X$ und $N \subset Y$. Dann heißen

(i) $f(M) := \{f(x) : x \in M\}$ das Bild von M unter f und

(ii) $f^{-1}(N) := \{x : f(x) \in N\}$ das Urbild von N unter f.

Speziell: $f(X)$ heißt der Wertebereich oder das Bild von f. Im allgemeinen ist der Wertebereich eine echte Teilmenge des Zielbereichs, d.h. wir haben $f(X) \subsetneq Y$

Wie vertragen sich Bild und Urbild mit Vereinigung und Durchschnitt?

Satz 3: Es sei $f: X \to Y$ eine Abbildung. $\mathcal{M} \subset \mathcal{P}(X)$ und $\mathcal{N} \subset \mathcal{P}(Y)$ seien Mengensysteme auf X bzw. Y. Dann gelten:

1. $f\left(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M\right) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} f(M)$; $f\left(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M\right) \subset \bigcap_{M \in \mathcal{M}} f(M)$;

2. $f^{-1}\left(\bigcup_{N \in \mathcal{N}} N\right) = \bigcup_{N \in \mathcal{N}} f^{-1}(N)$; $f^{-1}\left(\bigcap_{N \in \mathcal{N}} N\right) = \bigcap_{N \in \mathcal{N}} f^{-1}(N)$.

Bem.: Im 2. Teil von 1. gilt i. allg. nicht Gleichheit.

Bsp.: $\mathcal{M} = \{M_1, M_2\}$, $M_1 \cap M_2 = \emptyset \Rightarrow f(\bigcap_{M \in \mathcal{M}} M) = f(\emptyset) = \emptyset$.

Ist f konstant, also $f(x) = y_0$ für alle $x \in X$, so gilt $\bigcap_{M \in \mathcal{M}} f(M) = \{y_0\}$.

Exemplarisch wird der erste Teil von 1. bewiesen, den Beweis von 2. diskutieren wir in den Übungen.

"es existiert"

$$y \in f\Big(\bigcup_{M \in \mathcal{M}} M\Big) \iff \exists\ x \in \bigcup_{M \in \mathcal{M}} M \text{ mit } f(x) = y$$

$$\iff \exists\ M_0 \in \mathcal{M},\ x \in M_0 \text{ mit } f(x) = y$$

$$\iff \exists\ M_0 \in \mathcal{M} \text{ mit } y \in f(M_0)$$

$$\iff y \in \bigcup_{M \in \mathcal{M}} f(M) \qquad \square$$

Bez.: Neben dem sog. "Existenzquantor" $\exists$ verwendet man den "Allquantor" $\forall$. Er bedeutet "für alle". Weitere logische Symbole sind: $\wedge$ für "und" und $\vee$ für "oder" ($\vee$ von lat. vel = oder; oder ist hier nicht ausschließlich zu verstehen, also nicht im Sinne von entweder - oder).

Def.: Eine Abbildung $f: X \to Y$ heißt

(i) injektiv, falls für $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

(ii) surjektiv, wenn zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert,

so dass $y = f(x)$;

(iii) bijektiv, falls f injektiv und surjektiv ist.

Bsp.: Diese Eigenschaften hängen wesentlich vom Definitions- und Zielbereich einer Funktion ab.

$$f: X \to Y, \quad x \longmapsto f(x) = x^2$$

(a) $X = Y = \mathbb{R}$: weder injektiv, noch surjektiv;

(b) $X = \mathbb{R}, Y = [0,\infty)$: surjektiv, nicht injektiv;

(c) $X = [0,\infty)$, $Y = \mathbb{R}$: injektiv, nicht surjektiv

(d) $X = Y = [0,\infty)$: bijektiv.

Def. (Verknüpfung / Komposition von Abbildungen):

Es seien X, Y, Z Mengen, $g: X \to Y$ und $f: Y \to Z$ Abbildungen. Dann ist ihre Verknüpfung (Verkettung, Komposition) $f \circ g$ (gelesen "f nach g") definiert durch

$$f \circ g: X \to Z, \quad x \longmapsto f \circ g(x) := f(g(x)).$$

Skizze:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, "f \circ g"'] & Y \arrow[r, "f"] & Z \end{tikzcd}$$

Ist $f: X \to Y$ eine Bijektion, so gibt es zu jedem $y \in Y$ genau ein $x \in X$ für das gilt $f(x) = y$. Also können wir jedem $y \in Y$ dasjenige $x \in X$ zuordnen, für das $f(x) = y$ gilt. Auf diese Weise wird eine Abbildung von Y nach X festgelegt, die wir als Umkehrabbildung, Umkehrfunktion oder Inverse Abbildung bezeichnen:

<u>Def.</u> (Inverse Abbildung): Es sei $f: X \to Y$ bijektiv. Die Abbildung

$$f^{-1}: Y \to X, \quad y \mapsto f^{-1}(y),$$

definiert durch $f^{-1}(y) = x$, falls $f(x) = y$, heißt die <u>Inverse</u> (oder <u>Umkehrabbildung</u>) von f.

<u>Bem.</u>: • Nicht zu verwechseln mit dem Urbild von Mengen!

• $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_Y$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_X$

identische Abbildung auf Y bzw auf X