**Heinrich-Heine-Universität**
Marcus Zibrowius
Peter Arndt

**Wintersemester 2018/19**
18.12.2018

# Spezielle Themen der Algebra/Geometrie
# Blatt 11

---

### 21 | Homotopielametta

In dieser Aufgabe berechnen wir die Kohomologiegruppen der Homotopiefasern $F_{k,n}$ der Selbstabbildungen der Sphären $S^n$ vom Grad $k$ für $k, n > 1$.

(a) Die lange exakte Sequenz der Homotopiegruppen ermöglicht die Berechnung der Homologiegruppen $\mathrm{H}_0(F_{k,n}), \ldots, \mathrm{H}_{n-1}(F_{k,n})$.

(b) Aus $\mathrm{H}_0(F_{k,n}), \ldots, \mathrm{H}_{n-1}(F_{k,n})$ kann man die Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^0(F_{k,n}), \ldots, \mathrm{H}^{n-1}(F_{k,n})$ sowie den Torsionsanteil von $\mathrm{H}^n(F_{k,n})$ berechnen.

(c) Die Serre-Spektralsequenz zur Faserung kollabiert auf Seite $n$. Da wir wissen, wohin sie konvergiert, können wir für etliche Differentiale schließen, dass sie Isomorphismen sind. Es folgt $\mathrm{H}^i(F_{k,n}) = 0$ für viele $i \in \mathbb{N}$.

(d) Die übrigen Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^i(F_{k,n})$ kann man durch eine sich aus der Spektralsequenz ergebende kurze exakte Sequenz bestimmen.

### 22 | Jahresendbündel

In dieser Aufgabe lernen wir, dass die multiplikative Struktur im Kohomologiering des Totalraums eines Faserbündels $F \to X \to B$ über einem einfach-zusammenhängenden Raum $B$ im allgemeinen *nicht* eindeutig aus der Serre-Spektralsequenz zu bestimmen ist.

(a) Für jedes Faserbündel $X \to S^2$ mit Faser $S^2$ hat der Totalraum $X$ diesselben Kohomologiegruppen wie der Totalraum $S^2 \times S^2$ des trivialen Bündels.

(b) Im Kohomologiering von $S^2 \times S^2$ ist jedes Quadrat eines Elements vom Grad zwei ein geradfaches Vielfaches eines Erzeugers von $\mathrm{H}^4$.

(c) Der Abbildungszylinder der Hopfabbildung $h\colon S^3 \to \mathbb{CP}^1 = S^2$ ist ein Faserbündel mit Faser $D^2$.

(d) Indem wir zwei Kopien des Abbildungszylinders der Hopfabbildung entlang der Zylinderenden $S^3$ aneinanderkleben, erhalten wir ein Faserbündel $X \to S^2$ mit Faser $S^2$.

(e) Die Abbildung $X \to \mathbb{CP}^2$, die einen der beiden Abbildungszylinder aus dem vorherigen Aufgabenteil zu einem Punkt zusammenschlägt, induziert einen Isomorphismus auf $\mathrm{H}^4$.

(f) Im Kohomologiering des Raums $X$ aus Aufgabenteil (d) lebt ein Element vom Grad zwei, dessen Quadrat ein Erzeuger von $\mathrm{H}^4$ ist.

*Für diese Aufgabe sind ausnahmsweise bis zu sechs Punkte + Bonus zu erwerben.*

## Homotopische Weihnachten!

---

Abgabefrist: 08.01.2018 vor Beginn der Vorlesung