Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Tobias Hemmert

Sommersemester 2018
04.07.2018

Topologie II
Extrablatt

---

49 | Verschmelzung

Gegeben seien zwei zusammenhängende kompakte n-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2. Löscht man das Innere zweier n-dimensionaler Kreisscheiben $B_1 \subset M_1$ und $B_2 \subset M_2$ und identifiziert die Ränder ∂B_1 und ∂B_2 durch einen Homöomorphismus, so erhält man die **verbundene Summe** $M_1 \# M_2$. (Dabei soll angenommen werden, dass jedes B_i in eine größere Kreisscheibe in M_i eingebettet ist.)

(a) Wenn M_1 und M_2 nicht orientierbar sind, dann gilt

$$H_i(M_1 \# M_2) \cong H_i(M_1) \oplus H_i(M_2) \qquad (*)$$

für $0 < i < n-1$, und man erhält $H_{n-1}(M_1 \# M_2)$ aus $H_{n-1}(M_1) \oplus H_{n-1}(M_2)$, indem man eine Kopie von $\mathbb{Z}/2$ durch $\mathbb{Z}$ ersetzt. Andernfalls gilt $(*)$ für $0 < i < n$.

(b) Es gilt $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(S^n)$.

50 | Dreifaltigkeiten

Sei M eine zusammenhängende kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit $H_1(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r \oplus F$, wobei F eine endliche abelsche Gruppe ist. Dann ist $H_2(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^r$, falls M orientierbar ist, und $H_2(M;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/2$, falls M nicht orientierbar ist. Insbesondere ist $r \geq 1$, falls M nicht orientierbar ist.
Mithilfe von Aufgabe 50 lassen sich Beispiele konstruieren, die zeigen, dass es keine weiteren Einschränkungen für die Homologiegruppen kompakter 3-Mannigfaltigkeiten gibt. Dabei ist es hilfreich, den Abbildungstorus einer Spiegelung $S^2 \to S^2$ zu betrachten.

> Der Satz von Hurewicz gilt auch in folgender relativer Variante. Sei (X, A) ein Kofaserpaar mit einfach-zusammenhängendem $A \neq 0$, und sei $n \geq 2$. Gilt $\pi_i(X, A) = 0$ für $i < n$, so verschwindet auch $H_i(X, A)$ für $i < n$ und es ist $\pi_n(X, A) \cong H_n(X, A)$.

51 | Hütchen für Hurewicz

Jede Abbildung $f\colon X \to Y$ zwischen *einfach-zusammenhängenden* Räumen, die auf allen Homologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ einen Isomorphismus induziert, ist eine schwache Äquivalenz. Jede einfach-zusammenhängende kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist homotopieäquivalent zu S^3.

> Tatsächlich ist jede einfach-zusammenhängende kompakte 3-Mannigfaltigkeit sogar homöomorph zu S^3: *Eine kompakte Mannigfaltigkeit ist genau dann homotopieäquivalent zu S^n, wenn sie homöomorph ist zu S^n.* Der Fall $n = 3$ dieser sogenannten Poincaré-Vermutung wurde erst Anfang des Jahrtausends von Grigori Perelman bestätigt.

52 | Randerscheinungen

Für jede kompakte Mannigfaltigkeit N von ungerader Dimension gilt $\chi(N) = 0$. Für jede kompakte Mannigfaltigkeit M von ungerader Dimension mit Rand gilt $2\chi(M) = \chi(\partial M)$. $\mathbb{R}P^2$ ist nicht Rand einer kompakten 3-Mannigfaltigkeit.

Abgabefrist: 11.07.2018, 10:30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in Briefkasten 161 ein.