Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Tobias Hemmert

Sommersemester 2018
20.06.2018

Topologie II
Blatt 11

41 | Quersumme

Sei E_* eine beliebige Homologietheorie. Die von der Kodiagonalen $\nabla\colon X \sqcup X \to X$ induzierte Abbildung $\nabla_*\colon E_n(X) \oplus E_n(X) \to E_n(X)$ ist die Addition.

> Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G, auf der eine Topologie definiert ist, für die die Multiplikation $\mu\colon G \times G \to G$ und Inversenbildung $G \to G$ stetig sind. Zum Beispiel ist $S^1 \subset \mathbb{C}$ mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Topologie und Multiplikation eine topologische Gruppe.
>
> Eine **zusammenhängende graduierte K-Algebra** über einem Körper K ist ein graduierter K-Vektorraum $A = \bigoplus_{i\geq 0} A_i$ mit $A_0 = K$, zusammen mit einer Multiplikation $\cdot\colon A \otimes_K A \to A$, die A die Struktur einer K-Algebra gibt und sich einschränken lässt zu Abbildungen $A_i \otimes_K A_j \to A_{i+j}$. Homomorphismen zwischen solchen Objekten sind auf die naheliegende Weise definiert. Jede zusammenhängende graduierte K-Algebra ist ausgestattet mit einem eindeutigen graduierten K-Algebra-Homomorphismus $\varepsilon\colon A \to K$. Ist A eine zusammenhängende graduierte K-Algebra, so ist auch $A \otimes_K A$ wieder eine zusammenhängende graduierte K-Algebra, und zwar bezüglich der Multiplikation, die auf homogenen Elemente a_i, b_i gegeben ist durch
>
> $$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) := (-1)^{|a_2||b_1|}(a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2).$$
>
> Eine **zusammenhängende graduierte Hopfalgebra** über K ist eine zusammenhängende graduierte K-Algebra A zusammen mit einem graduierten K-Algebra-Homomorphismus $\Delta\colon A \to A \otimes A$, für den gilt: $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id}$ und $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\Delta = \mathrm{id}$. Explizit besagt dies, dass für jedes homogene Element $x \in A$ von positivem Grad gilt:
>
> $$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_i x'_i \otimes x''_i \text{ mit } |x'_i|, |x''_i| < |x|$$

42 | Hopfalgebra

Sei G eine wegzusammenhängende topologische Gruppe mit endlich erzeugter Homologie, und sei K ein beliebiger Körper. Die Gruppenmultiplikation μ und die Inklusion der Identität $i\colon \{e\} \to G$ induzieren Abbildungen Δ und ε, die $H^*(G; K)$ die Struktur einer zusammenhängenden graduierten Hopfalgebra geben.

43 | Nullhomophob

Die **Hopfabbildung** $S^3 \twoheadrightarrow S^2$, also die Komposition der kanonischen Projektion $S^3 \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^1$ mit einem Homöomorphismus $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$, ist nicht nullhomotop. Es folgt, dass $\mathbb{CP}^2$ nicht homotopieäquivalent ist zu $S^4 \vee \mathbb{CP}^1$.

44 | Einmaleins

Für wohlpunktierte Räume X und Y ist $\widetilde{H}^*(X \vee Y) \cong \widetilde{H}^*(X) \oplus \widetilde{H}^*(Y)$. Das $\cup$-Produkt einer Klasse aus $\widetilde{H}^*(X)$ mit einer Klasse aus $\widetilde{H}^*(Y)$ ist stets Null. Auch hieraus folgt: $\mathbb{CP}^2$ ist nicht homotopieäquivalent zu $S^4 \vee \mathbb{CP}^1$.

Abgabefrist: 27.06.2018, 10:30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in Briefkasten 161 ein.