

Topologie II Blatt 10

37 | Hütchentrick

Eine Abbildung von topologischen Räumen $f: X \rightarrow Y$ induziert genau dann einen Isomorphismus auf allen Homologiegruppen mit Koeffizienten in \mathbb{Z} , wenn sie Isomorphismen auf allen Homologiegruppen mit Koeffizienten in \mathbb{Q} und in \mathbb{Z}/p (für alle Primzahlen p) induziert.

38 | Bockstein

Gegeben seien ein Raum X und eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0.$$

Dann gibt es lange exakte Sequenzen

$$\cdots \rightarrow H_n(X; A) \rightarrow H_n(X; B) \rightarrow H_n(X; C) \xrightarrow{\beta_*} H_{n-1}(X; A) \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow H^n(X; A) \rightarrow H^n(X; B) \rightarrow H^n(X; C) \xrightarrow{\beta^*} H^{n+1}(X; A) \rightarrow \cdots$$

Die Randabbildung β heißt jeweils der zugehörige **Bocksteinhomomorphismus**.

Was ist der Bocksteinhomomorphismus in Homologie bzw. Kohomologie für den Raum $X = \mathbb{RP}^3$ und die exakte Sequenz $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow \mathbb{Z}/4 \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$?

39 | Spot the difference

Seien $f, g: X \rightarrow Y$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Welche der folgenden beiden Aussagen ist/sind wahr?

- (A) Ist $f_*: H_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(Y; \mathbb{Z})$ ein Isomorphismus, so ist auch $f_*: H_*(X; G) \rightarrow H_*(Y; G)$ ein Isomorphismus für jede abelsche Gruppe G .
- (B) Ist $f_* = g_*: H_*(X; \mathbb{Z}) \rightarrow H_*(Y; \mathbb{Z})$, so ist auch $f_* = g_*: H_*(X; G) \rightarrow H_*(Y; G)$ für jede abelsche Gruppe G .

40 | Eulerprodukt

Seien X, Y topologische Räume, so dass $H_*(X; \mathbb{Z})$ und $H_*(Y; \mathbb{Z})$ endlich erzeugt sind, also deren Eulercharakteristik $\chi(X) = \sum_n (-1)^n \text{rang}(H_n(X; \mathbb{Z}))$ definiert ist.

Wenn F ein beliebiger Körper ist, dann gilt $\chi(X) = \sum_n (-1)^n \dim_F(H_n(X; F))$. Ferner ist auch $H_*(X \times Y; \mathbb{Z})$ endlich erzeugt und es gilt $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.