

Topologie II Blatt 9

33 | Camera obscura III

Künneth hat eine ganz eigene Idee zur Berechnung der Homologie des Raumes X aus Aufgabe 29.

Mit anderen Worten: Finden Sie eine nicht-triviale Zerlegung von X in ein Produkt von Räumen, und berechnen Sie die Homologie von X mit Hilfe des Künneth-Theorems.

34 | Zwei kleine Flaschen

Sei K die Kleinsche Flasche. Welche Homologie hat $K \times K$ mit Koeffizienten in \mathbb{Z} , in $\mathbb{Z}/2$, in $\mathbb{Z}/3$ und in \mathbb{Q} ?

35 | Kleingedrucktes

Sei X ein topologischer Raum, dessen Homologiegruppen mit Koeffizienten in \mathbb{Z} endlich erzeugt sind. Fixieren wir die Notation

$$H_n(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{r_n} \oplus \bigoplus_{\substack{p \text{ prim} \\ k > 0}} (\mathbb{Z}/p^k)^{r_n^{p^k}},$$

so gilt für die Homologie mit Koeffizienten in \mathbb{Z}/p (p prim):

$$H_n(X; \mathbb{Z}/p) \cong (\mathbb{Z}/p)^r \quad \text{mit } r = r_n + \sum_{k>0} r_n^{p^k} + \sum_{k>0} r_{n-1}^{p^k}.$$

36 | Körperwelten

Für die reduzierte Homologie eines topologischen Raumes X gilt:

$$\tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}) = 0 \text{ für alle } n \Leftrightarrow \begin{cases} \tilde{H}_n(X; \mathbb{Q}) = 0 & \text{für alle } n \\ \text{und } \tilde{H}_n(X; \mathbb{Z}/p) = 0 & \text{für alle } n \text{ und alle Primzahlen } p. \end{cases}$$