Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Tobias Hemmert

Sommersemester 2018
09.05.2018

Topologie II
Blatt 5

17 | Rateschleife

Es gibt Zellkomplexe, deren Fundamentalgruppe folgende Darstellung besitzt:

$$\langle a, b \mid a^2 = b^3, ab = (b^{-1}a)^4 \rangle$$

Diese Zellkomplexe sind nicht zusammenziehbar.

Tipp: Es gibt von der angegebenen Gruppe einen nicht-trivialen Gruppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe S_5.

18 | Scheinpunktraum

Es gibt einen nicht zusammenziehbaren, endlich-dimensionalen Zellkomplex, der sich anhand seiner zellulären Homologiegruppen nicht vom Einpunktraum unterscheiden lässt.

19 | Homotopieegalisator

Zu je zwei Abbildungen $f, g\colon X \rightrightarrows Y$ gibt es einen „größten Quotienten“ $Y \to E_{f,g}$, für den die beiden Kompositionen $X \rightrightarrows Y \to E$ homotop werden. Genauer definieren wir den Homotopieegalisator $E_{f,g}$ als folgendes Pushout:

$$\begin{tikzcd}
X \sqcup X \arrow[r, "f \sqcup g"] \arrow[d, tail, "i_0 \sqcup i_1"'] & Y \arrow[d] \\
X \times I \arrow[r] & E
\end{tikzcd}$$

Wir erhalten $E_{f,g}$ also, indem wir in der disjunkten Summe $(X \times I) \sqcup Y$ jeweils $(x, 0)$ mit $f(x)$ und $(x, 1)$ mit $g(x)$ identifizieren. Das ist in Wahrheit natürlich gar kein Quotient von Y. Lässt sich die Formulierung „größter Quotient“ trotzdem mit Sinn füllen?

20 | Cancellation Lemma

Gegeben sei ein Kettenkomplex abelscher Gruppen (C, d), sodass für ein $n \in \mathbb{Z}$ gilt: $C_n = C'_n \oplus A$ und $C_{n-1} = C'_{n-1} \oplus A$ für gewisse abelsche Gruppen C'_n, C'_{n-1} und A. Ferner sei die Komponente von $d_n\colon C_n \to C_{n-1}$, die A auf A abbildet, ein Isomorphismus. Dann ist (C, d) kettenhomotopieäquivalent zu einem Kettenkomplex der Form

$$(C', d')\colon \quad \cdots \to C_{n+2} \to C_{n+1} \to C'_n \to C'_{n-1} \to C_{n-2} \to C_{n-3} \to \cdots .$$

Wie lassen sich die Differentiale d' beschreiben?

Abgabefrist: 16.05.2018