Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Tobias Hemmert

Sommersemester 2018
18.04.2018

Topologie II
Blatt 2

---

5 | Zellrechnung

In der Vorlesung wurde behauptet, für eine Zelltriade $(X; A, B)$ gelte stets

$$\frac{X}{A} \cong \frac{B}{A \cap B}.$$

Allgemeiner gilt das für eine beliebige Überdeckung eines topologischen Raumes X durch zwei abgeschlossene Unterräume A, B.

6 | Schlangenlemma

Gegeben sei ein kommutatives Diagramm abelscher Gruppen wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & B \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r] & B' \arrow[r] & C' &
\end{tikzcd}$$

Die beiden kanonischen induzierten Sequenzen der Kerne und der Kokerne lassen sich mit Hilfe eines Gruppenhomomorphismus $\partial\colon \ker(\gamma) \to \operatorname{coker}(\alpha)$ zu einer exakten Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\ker(\alpha) \arrow[r] & \ker(\beta) \arrow[r] & \ker(\gamma) \arrow[dll, "\partial"] \\
\operatorname{coker}(\alpha) \arrow[r] & \operatorname{coker}(\beta) \arrow[r] & \operatorname{coker}(\gamma)
\end{tikzcd}$$

zusammenfügen. Bleibt das gegebene Diagramm exakt, wenn wir in der oberen Zeile links und in der unteren Zeile rechts eine Null ergänzen, so bleibt auch die Sequenz der Kerne und Kokerne exakt, wenn wir am Anfang und am Ende eine Null ergänzen.

7 | Mayer-Vietoris

In folgender kommutativer Leiter seien die Zeilen exakt und jeder dritte vertikale Pfeil wie angedeutet ein Isomorphismus:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_i \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & A_i \arrow[r] \arrow[d] & B_i \arrow[r] \arrow[d] & X_{i-1} \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & Y_i \arrow[r] & C_i \arrow[r] & D_i \arrow[r] & Y_{i-1} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Dann lässt sich eine lange exakte Sequenz basteln der Form

$$\cdots \to A_i \to B_i \oplus C_i \to D_i \to A_{i-1} \to \cdots .$$

8 | Kurz und klein

In der folgenden langen exakten Sequenz seien Morphismen σ_i gegeben, die die Morphismen α_i „spalten“: es gelte $\sigma_i\alpha_i = \mathrm{id}$ für alle i.

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[r, "\beta_{i+1}"] & M''_{i+1} \arrow[dll, "\partial_{i+1}"'] \\
M'_i \arrow[r, "\alpha_i"] & M_i \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[l, dashed, bend left, "\sigma_i"] & M''_i \arrow[dll, "\partial_i"'] \\
M'_{i-1} \arrow[r, "\alpha_{i-1}"] & \cdots \arrow[l, dashed, bend left, "\sigma_{i-1}"]
\end{tikzcd}$$

Dann verschwinden alle ∂_i, und die kurzen exakten Sequenzen, die sich in jeder Zeile ergeben, sind isomorph zu den offensichtlichen kurzen exakten Sequenzen

$$0 \to M'_i \to M'_i \oplus M''_i \to M''_i \to 0.$$

Insbesondere ist also zum Beispiel jeweils $M_i \cong M'_i \oplus M''_i$ und $M''_i \cong \ker \sigma_i$.