Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Tobias Hemmert

Wintersemester 2015/16
4.1.2015

Topologie II
Blatt 14

---

51 | Fachübergreifender Unterricht

Eine Homöomorphismus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(0) = 0$ heißt **orientierungstreu**, falls der induzierte Automorphismus von $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - 0; \mathbb{Z})$ die Identität ist.

(a) Ein $\mathbb{R}$-linearer Isomorphismus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann orientierungserhaltend, wenn er orientierungstreu ist im Sinne der linearen Algebra (wenn er also positive Determinante hat).

(b) Ein Diffeomorphismus $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $f(0) = 0$ ist genau dann orientierungserhaltend, wenn er orientierungstreu ist im Sinne Analysis (wenn also seine Ableitung orientierungstreu ist).

* Ein glatte Mannigfaltigkeit ist folglich genau dann in unserem Sinne orientierbar, wenn sie orientierbar ist im Sinne der Differentialgeometrie (wenn sie also einen orientierungstreuen Atlas besitzt).

52 | Verschmelzung

Gegeben seien zwei zusammenhängende kompakte n-Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2. Löscht man das Innere zweier n-dimensionaler Kreisscheiben $B_1 \subset M_1$ und $B_2 \subset M_2$ und identifiziert die Ränder ∂B_1 und ∂B_2 durch einen Homöomorphismus zwischen ihnen miteinander, so erhält man die **verbundene Summe** $M_1 \# M_2$ von M_1 und M_2. (Dabei soll angenommen werden, dass jedes B_i in eine größere Kreisscheibe in M_i eingebettet ist.)

(a) Wenn M_1 und M_2 nicht orientierbar sind, dann gilt

$$H_i(M_1 \# M_2) \cong H_i(M_1) \oplus H_i(M_2) \tag{$*$}$$

für $0 < i < n-1$, und man erhält $H_{n-1}(M_1 \# M_2)$ aus $H_{n-1}(M_1) \oplus H_{n-1}(M_2)$, indem man eine Kopie von $\mathbb{Z}/2$ durch $\mathbb{Z}$ ersetzt. Andernfalls gilt $(*)$ für $0 < i < n$.

(b) Es gilt $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - \chi(S^n)$.

53 | Dreifaltigkeiten

Sei M eine kompakte 3-Mannigfaltigkeit mit $H_1(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r \oplus F$, wobei F eine endliche abelsche Gruppe ist.

Dann gilt $H_2(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^r$, falls M orientierbar ist, und $H_2(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^{r-1} \oplus \mathbb{Z}/2$, falls M nicht orientierbar ist. Insbesondere ist $r \geq 1$, falls M nicht orientierbar ist.

Mithilfe von Aufgabe 52 lassen sich Beispiele konstruieren, die zeigen, dass es keine weiteren Einschränkungen für die Homologiegruppen kompakter 3-Mannigfaltigkeiten gibt. Dabei ist es hilfreich, den Abbildungstorus einer Spiegelung $S^2 \to S^2$ zu betrachten.

54 | Bébé Poincaré

Jede einfach-zusammenhängende kompakte Fläche ist homöomorph zu S^2.

Jede einfach-zusammenhängende kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist homotopieäquivalent zu S^3.

> Der erste Teil der Aufgabe folgt leicht aus der topologischen Klassifikation kompakter Flächen. Tatsächlich gilt auch in höheren Dimensionen:
>
> *Eine kompakte Mannigfaltigkeit ist genau dann homotopieäquivalent zur n-Sphäre, wenn sie zur n-Sphäre homöomorph ist.*
>
> Diese sogenannte **Poincaré-Vermutung** wurde im Fall $n = 3$ erst Anfang des Jahrtausends von Grigori Perelman bestätigt.