Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Tobias Hemmert

Wintersemester 2015/16
21.1.2015

Topologie II
Blatt 12

Eine **topologische Gruppe** ist eine Gruppe G, auf der eine Topologie definiert ist, so dass die Gruppenmultiplikation $\mu\colon G \times G \to G$ und die inverse Abbildung $G \to G$ stetig sind. Zum Beispiel ist $S^1 \subset \mathbb{C}$ mit der von $\mathbb{C}$ induzierten Topologie und Multiplikation eine topologische Gruppe.

Eine **graduierte Hopfalgebra** über einem Körper K ist eine graduierte K-algebra $A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ mit graduierten K-Algebra-Homomorphismen $\Delta\colon A \to A \otimes A$ und $\epsilon\colon A \to K$, so dass gilt:

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})\Delta = \mathrm{id} \quad \text{und} \quad (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\Delta = \mathrm{id} \tag{$*$}$$

Hierbei ist $A \otimes A$ eine graduierte K-Algebra durch die Multiplikation

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|a_2||b_1|}(a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$$

für homogene Elemente a_i, b_i. Die graduierte Hopfalgebra A heißt **zusammenhängend**, falls $\epsilon_0\colon A_0 \to K$ ein Isomorphismus ist. In diesem Fall besagt $(*)$ gerade, dass für jedes homogene x von positivem Grad gilt: $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x + \sum_i x_i' \otimes x_i''$ mit $|x_i'|, |x_i''| < |x|$

43 | Hopfen und Malz . . .

Sei G eine wegzusammenhängende topologische Gruppe mit endlich erzeugter Homologie. Dann induzieren die Gruppenmultiplikation μ und die Inklusion der Identität $i\colon \{e\} \to G$ Abbildungen Δ und ϵ, die $H^*(G;K)$ die Struktur einer zusammenhängenden graduierten Hopfalgebra geben.

44 | . . . verloren

Auf den Räumen S^{2n} und $\mathbb{CP}^n$ kann keine topologische Gruppenstruktur definiert werden.

45 | Einmaleins

Für wohlpunktierte Räume X und Y ist $\widetilde{H}^*(X \vee Y) \cong \widetilde{H}^*(X) \oplus \widetilde{H}^*(Y)$. Das $\cup$-Produkt einer Klasse aus $\widetilde{H}^*(X)$ mit einer Klasse aus $\widetilde{H}^*(Y)$ ist stets Null.

Es folgt zum Beispiel, dass $\mathbb{CP}^2$ nicht homotopieäquivalent ist zu $S^4 \vee \mathbb{CP}^1$.

Die **Hopfabbildung**/das Hopfbündel

$$S^3 \twoheadrightarrow S^2$$

ist die kanonische Projektion $S^3 \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^1$ bzw. ihre Komposition mit einem Homöomorphismus $\mathbb{CP}^1 \cong S^2$. Sie tritt zum Beispiel auf als Anheftabbildung für die oberste Zelle in der Standardzellstruktur auf $\mathbb{CP}^2$.

46 | Nullhomophob

Die Hopfabbildung ist nicht nullhomotop. * Wussten wir das schon?

Um den Korrekturservice zu nutzen, versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen, heften Sie sie zusammen und geben Sie sie zu Beginn der nächsten Übung ab (28.1.2015, 8:30 Uhr in 25.22.U1.74).