Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Tobias Hemmert

Wintersemester 2015/16
14.1.2016

Topologie II
Blatt 11

---

39 | Hütchentrick

Eine Abbildung von topologischen Räumen $f\colon X \to Y$ induziert genau dann einen Isomorphismus auf allen Homologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}$, wenn sie Isomorphismen auf allen Homologiegruppen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ und in $\mathbb{Z}/p$ (für alle Primzahlen p) induziert.

Tipp: Das „Hütchen“ verweist auf den Abbildungskegel.

40 | Bockstein

Gegeben seien ein Raum X und eine kurze exakte Sequenz von abelschen Gruppen

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Dann gibt es lange exakte Sequenzen

$$\cdots \to H_n(X;A) \to H_n(X;B) \to H_n(X;C) \xrightarrow{\beta_*} H_{n-1}(X;A) \to \cdots$$

$$\cdots \to H^n(X;A) \to H^n(X;B) \to H^n(X;C) \xrightarrow{\beta^*} H^{n+1}(X;A) \to \cdots$$

Die Randabbildung β heißt jeweils der zugehörige **Bocksteinhomomorphismus**.

Was ist der Bocksteinhomomorphismus in Homologie bzw. Kohomologie für den Raum $X = \mathbb{RP}^3$ und die exakte Sequenz $0 \to \mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/4 \to \mathbb{Z}/2 \to 0$?

41 | Spot the difference

Seien $f, g\colon X \to Y$ Abbildungen zwischen topologischen Räumen. Welche der folgenden beiden Aussagen ist/sind wahr?

(A) Ist $f_*\colon H_*(X,\mathbb{Z}) \to H_*(Y,\mathbb{Z})$ ein Isomorphismus, so ist auch $f_*\colon H_*(X;G) \to H_*(Y;G)$ ein Isomorphismus für jede abelsche Gruppe G.

(B) Ist $f_* = g_*\colon H_*(X;\mathbb{Z}) \to H_*(Y;\mathbb{Z})$, so ist auch $f_* = g_*\colon H_*(X;G) \to H_*(Y;G)$ für jede abelsche Gruppe G.

42 | Eulerprodukt

Seien X, Y topologische Räume, so dass $H_*(X;\mathbb{Z})$ und $H_*(Y;\mathbb{Z})$ endlich erzeugt sind, also deren Eulercharakteristik $\chi(X) = \sum_n (-1)^n \mathrm{rang}(H_n(X;\mathbb{Z}))$ definiert ist.

Wenn F ein beliebiger Körper ist, dann gilt $\chi(X) = \sum_n (-1)^n \dim_F(H_n(X;F))$. Ferner ist auch $H_*(X \times Y;\mathbb{Z})$ endlich erzeugt und es gilt $\chi(X \times Y) = \chi(X)\chi(Y)$.

Um den Korrekturservice zu nutzen, versehen Sie Ihre Lösungen mit Ihrem Namen, heften Sie sie zusammen und geben Sie sie zu Beginn der nächsten Übung ab (21.1.2016, 8:30 Uhr in 25.22.U1.74).