Topologie I Extrablatt Aufgabe ★ Spaltprodukt

Zeigen Sie, dass
$\pi_n(X \vee Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y)$
für alle $n \geq 2$ gilt und folgern Sie, dass
$\pi_n(S^n \vee S^n) \cong \mathbb{Z}^{\oplus 2}$.

Betrachte die lange exakte Sequenz

$$\ldots \to \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y) \xrightarrow{\partial} \pi_n(X \vee Y) \xrightarrow{i_*} \underbrace{\pi_n(X \times Y)}_{\cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y)} \to \pi_n(X \times Y, X \vee Y) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(X \vee Y) \to \ldots$$

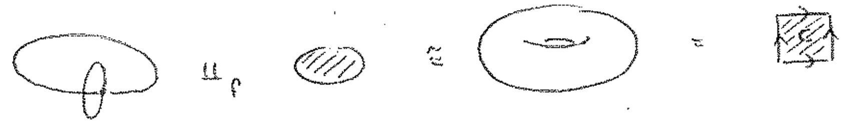
zu dem Paar $(X \times Y, X \vee Y)$. Da die Diagramme

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[drr, equal] & X \vee Y \arrow[r] & (X \vee Y)/Y \arrow[d, "\cong"] \\ & & X \end{tikzcd} \quad \text{und} \quad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[drr, equal] & X \vee Y \arrow[r] & (X \vee Y)/X \arrow[d, "\cong"] \\ & & Y \end{tikzcd}$$

Kommutativ sind, definiert $((\mathrm{incl}_X)_*, (\mathrm{incl}_Y)_*) : \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \to \pi_n(X \vee Y)$
einen Schnitt, sodass i_* surjektiv ist. Somit ist die Abbildung
$\pi_n(X \times Y) \to \pi_n(X \times Y, X \vee Y)$ aufgrund der Exaktheit die Null-
abbildung und wir erhalten
$\pi_n(X \vee Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y)$
nach dem Spaltungslemma (Blatt 8 Aufgabe 4 → Beweis).

Nun gilt $S^n \times S^n \cong (S^n \vee S^n) \sqcup_f D^{2n}$, $S^n \times S^n$ geht also aus $S^n \vee S^n$
durch Anheften einer $2n$-Zelle hervor.

($n = 1$



).

Somit ist $(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)$ nach Satz 8.15 $(2n-1)$-zusammen-
hängend und wir erhalten

$$\pi_n(S^n \vee S^n) \underset{\text{s.o.}}{\cong} \pi_n(S^n) \oplus \pi_n(S^n) \oplus \underbrace{\pi_{n+1}(S^n \times S^n, S^n \vee S^n)}_{\substack{(2n-1)\text{-} \\ \cong\, 0 \\ \text{zshgd.}}}$$

$$\cong \mathbb{Z}^{\oplus 2}$$

Topologie I Extrablatt Aufgabe ★ Wildfang

Zeigen Sie, dass $\pi_7(S^4)$ nicht endlich ist.

Betrachte das Hopfbündel $S^7 \twoheadrightarrow S^4$ mit Faser S^3.
Erhalten die lange exakte Sequenz

$$\dots \to \pi_7(S^3) \xrightarrow{\varphi} \underbrace{\pi_7(S^7)}_{\cong \mathbb{Z}} \xrightarrow{\psi} \pi_7(S^4) \to \dots$$

Ist der linke Pfeil φ die Nullabbildung, so ist ψ aufgrund der Exaktheit injektiv und somit $\mathbb{Z}$ (bis auf Isomorphie) eine Untergruppe von $\pi_7(S^4)$. Also [redacted] könnte $\pi_7(S^4)$ dann nicht endlich sein.

[redacted] Nun ist φ gegeben durch

$$\underset{\pi_7(S^3)}{\overset{\|}{[S^7, S^3]}} \to [S^7 \to \underbrace{S^3 \to S^7}_{\in \pi_3(S^7)}],$$

wobei $\pi_3(S^7) = [S^3, S^7] \cong 0$. Somit gilt $\varphi = 0$.

Topologie I Extrablatt Aufgabe ★ Variationen

Bestimmen Sie $H_*(S^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $H_*(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}),\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$, $H_*(S^n;\mathbb{Q})$ und $H_*(\mathbb{P}^n(\mathbb{R});\mathbb{Q})$.

Die jeweiligen Kettenkomplexe sind gegeben durch

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \ldots \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$$

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow[2,\ n \text{ ger.}]{0,\ n \text{ ung.}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{0} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0 \to \ldots$$

$$\ldots \to 0 \to \mathbb{Q} \to 0 \to \ldots \to 0 \to \mathbb{Q} \to 0 \to \ldots$$

$$\ldots \to 0 \to \underset{\text{Grad } n}{\mathbb{Q}} \xrightarrow[2,\ n \text{ ger.}]{0,\ n \text{ ung.}} \mathbb{Q} \to \ldots \xrightarrow{2} \mathbb{Q} \xrightarrow{0} \underset{\text{Grad } 0}{\mathbb{Q}} \to 0 \to \ldots$$

Somit erhalten wir

$$H_i(S^n;\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & i=0,n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R});\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & 0 \le i \le n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(S^n;\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \mathbb{Q}, & i=0,n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$H_i(\mathbb{P}^n(\mathbb{R});\mathbb{Q}) \cong \begin{cases} \begin{cases} \mathbb{Q}, & i=0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, & n \text{ gerade} \\ \begin{cases} \mathbb{Q}, & i=0,n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Topologie I Extrablatt Aufgabe ★ Charakterstudie

Zeigen Sie, dass die Eulercharakteristik $\chi(X)$ eines endlichen Zellkomplexes X gegeben ist durch
$\sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_{\mathbb{Q}}(H_i(X;\mathbb{Q}))$.

Betrachte den zellulären Kettenkomplex

$$\dots \to 0 \xrightarrow{d_{n+1}} \mathbb{Q}^{r_n} \xrightarrow{d_n} \mathbb{Q}^{r_{n-1}} \xrightarrow{d_{n-1}} \dots \xrightarrow{d_2} \mathbb{Q}^{r_1} \xrightarrow{d_1} \mathbb{Q}^{r_0} \xrightarrow{d_0} 0 \to \dots$$

Grad $\dim(X)$. Grad 0

Der Rangsatz und die Dimensionsformel für Quotienten liefern nun die Formeln

$$\dim_{\mathbb{Q}}(H_i(X;\mathbb{Q})) = \dim(\ker(d_i)) - \mathrm{rk}(d_{i+1})$$

und

$$r_i = \dim(\ker(d_i)) + \mathrm{rk}(d_i).$$

Nun erhalten wir

$$\begin{aligned}\chi(X) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i r_i &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\dim(\ker(d_i)) + \mathrm{rk}(d_i))\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i(\dim_{\mathbb{Q}}(H_i(X;\mathbb{Q})) + \mathrm{rk}(d_{i+1}) + \mathrm{rk}(d_i))\\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \dim_{\mathbb{Q}}(H_i(X;\mathbb{Q})).\end{aligned}$$

$\mathrm{rk}(d_0) = 0 = \mathrm{rk}(d_{n+1})$;
die anderen heben sich weg