

Topologie I Blatt 9

33 | Glasperlen

Alle Homotopiegruppen von $\mathbb{C}P^n$ lassen sich durch Homotopiegruppen von Sphären ausdrücken.

34 | Mehrzeller

Der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ lässt sich aus dem reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^{n-1}$ durch „Anheften einer n -Zelle“ konstruieren. Das heißt, dass es ein Pushoutdiagramm der folgenden Form gibt:

$$\begin{array}{ccc} S^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & D^n \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{R}P^{n-1} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}P^n \end{array}$$

Hier ist die obere Kofaserung die Inklusion der Sphäre S^{n-1} in D^n als Rand. Der linke vertikale Pfeil ist das Faserbündel aus Aufgabe 28, die kanonische zweifache Überlagerung.

35 | Verwirrhinweis

Wir werden später in der Vorlesung sehen: $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Aus diesem Resultat folgt:

$$\begin{aligned} \pi_n(\mathbb{R}P^n / \mathbb{R}P^{n-1}) &\cong \mathbb{Z} \\ \pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) &\cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{aligned}$$

36 | Unendliche Weiten

Genau wie die unendlich-dimensionale Sphäre S^∞ können wir auch unendlich-dimensionale reelle und komplexe projektive Räume definieren:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}P^\infty &:= \operatorname{colim} (\mathbb{R}P^0 \hookrightarrow \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \dots) \\ \mathbb{C}P^\infty &:= \operatorname{colim} (\mathbb{C}P^0 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2 \hookrightarrow \dots) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir Faserbündel:

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{R}P^\infty \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^\infty \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$