

Topologie I Blatt 8

29 | Gehopft wie gespringt

Es ist $\mathbb{R}P^1 \cong S^1$ und $\mathbb{C}P^1 \cong S^2$. Insbesondere haben wir Faserbündel, die sogenannten Hopfbündel, der folgenden Form:

$$\begin{array}{ccc} S^0 & \longrightarrow & S^1 \\ & & \downarrow \\ & & S^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^1 & \longrightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \\ & & S^2 \end{array}$$

30 | Kokomposition

Sei T ein punktierter Raum. Die folgenden beiden Aussagen über eine Sequenz $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ in \mathcal{Top}_\bullet sind äquivalent:

- (a) Die induzierte Sequenz $[X, T] \xleftarrow{f^*} [Y, T] \xleftarrow{g^*} [Z, T]$ ist eine exakte Sequenz punktierter Mengen.
- (b) Genau dann existiert zu einer Abbildung $t: Y \rightarrow T$ eine Abbildung $\bar{t}: Z \rightarrow T$ mit $\bar{t} \circ g$ homotop zu t , wenn $t \circ f$ homotop zur konstanten Abbildung ist.

31 | Regionalbahn

Jeder Homomorphismus abelscher Gruppen $f: A \rightarrow B$ ist Teil einer exakten Sequenz

$$0 \rightarrow \ker(f) \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow \operatorname{coker}(f) \rightarrow 0.$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} f \text{ injektiv} &\Leftrightarrow 0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \text{ exakt} \\ f \text{ surjektiv} &\Leftrightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0 \text{ exakt} \end{aligned}$$

32 | Haarspalterei

Ist B eine abelsche Gruppe, die in einer kurzen Sequenz abelscher Gruppen der Form

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow \mathbb{Z}^n \rightarrow 0$$

auftritt, so ist $B \cong A \oplus \mathbb{Z}^n$. Welche abelschen Gruppen B passen in eine kurze exakte Sequenz der Form $0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow B \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$?