**Heinrich-Heine-Universität**
Marcus Zibrowius
Thor Wittich

**Wintersemester 2019**
15.10.2019

# Topologie I
# Blatt 2

---

## 5 | Metamorphismen

Wir können eine Gruppe $G$ auffassen als eine Kategorie $\mathcal{G}$ mit genau einem Element $*$ und Morphismen $\mathcal{G}(*,*) := G$. Fassen wir Gruppen $G$ und $H$ als Kategorien $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ auf, so können wir ferner einen Gruppenhomomorphismus $f\colon G \to H$ auffassen als einen Funktor $\mathcal{G} \to \mathcal{H}$. Sind $f_1, f_2\colon G \rightrightarrows H$ zwei Gruppenhomomorphismen, die wir auf diese Weise als Funktoren auffassen, was ist dann eine natürliche Transformation $f_1 \rightsquigarrow f_2$?

## 6 | Wege nach Rom

Ist $X$ wegzusammenhängend, so definiert der kanonische Inklusionsfunktor für jeden beliebigen Punkt $x$ von $X$ eine Äquivalenz von Kategorien

$$i\colon \pi_1(X,x) \to \Pi(X).$$

Wie sieht ein Funktor $G\colon \Pi(X) \to \pi_1(X,x)$ in umgekehrter Richtung aus, der eine Äquivalenz definiert? Wodurch sind natürliche Isomorphismen $\mathrm{Id}_{\Pi(X)} \rightsquigarrow iG$ und $Gi \rightsquigarrow \mathrm{Id}_{\pi_1(X,x)}$ gegeben?

## 7 | Punktgewinn

Es gibt einen Funktor $\mathcal{T}op \to \mathcal{T}op_\bullet$, der einem Raum $X$ den Raum $X \coprod \{\bullet\}$ mit dem ausgezeichneten Basispunkt $\bullet$ zuordnet. Dieser ist linksadjungiert zum vergesslichen Funktor $\mathcal{T}op_\bullet \to \mathcal{T}op$.

Gibt es auch einen Rechtsadjungierten zum vergesslichen Funktor?

## 8 | Hauptdarsteller

(a) Für eine (lokal kleine) Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt $X$ in $\mathcal{C}$ gibt es einen Funktor

$$\mathcal{C}(-,X)\colon \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et,$$

der für Objekte durch die Zuordnung $Y \mapsto \mathcal{C}(Y,X)$ und für Morphismen durch die Zuordnung

$$(f\colon Z \to Y)^{\mathrm{op}} \mapsto \begin{pmatrix} f^*\colon \mathcal{C}(Y,X) \to \mathcal{C}(Z,X) \\ \qquad g \quad \mapsto \quad g \circ f \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Ein Funktor $\mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$, der natürlich isomorph zum Funktor $\mathcal{C}(-,X)$ ist, heißt **darstellbar** durch das Objekt $X$.

(b) Der Funktor $\mathcal{T}op^{\mathrm{op}} \to \mathcal{S}et$, der einem Raum $Y$ seine Topologie $\mathcal{O}(Y)$ zuordnet, also die Menge aller offenen Teilmengen von $Y$, und der eine stetige Abbildung $f\colon Z \to Y$ wirft auf die Urbildabbildung $f^{-1}\colon \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(Z)$, ist darstellbar durch den Zweipunktraum $X := \{0,1\}$ mit der Topologie $\mathcal{O}(X) := \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$.

---

Abgabefrist: 22.10.2019, 10:30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in den Briefkasten auf Ebene 25.22.00 ein.