Topologie I: Klausur 3

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2017/2018

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telephonjoker etc.) zugelassen.

  Bitte legen Sie alle Taschen und Jacken vor Beginn der Klausur vorn im Hörsaal ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Ausnahmen: traditionelle Armbanduhren und Wecker.
- Bitte ergänzen Sie folgende Angaben.

  Name:
  Matrikelnr.:

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 4 Aufgaben. Insgesamt sind bis zu 120 Punkte zu erwerben. Der Punktwert der einzelnen Aufgaben ist jeweils angegeben. Ab 50 erreichten Punkten gilt die Klausur als bestanden.
- Sie können für die Lösung der Aufgaben jeden Satz aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form, d. h. unabhängig von der konkreten Aufgabenstellung, wiedergeben.
- Das Ergebnis der Klausur können Sie in einigen Wochen im online-Portal einsehen. Wenn Sie ein Pseudonym angeben, wird Ihr Ergebnis bereits vorher unter diesem Pseudonym auf der Webseite zur Vorlesung veröffentlicht.

  Pseudonym:

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte	30	34	26	30	120

1 | Wegeraum (30 Punkte)

(a) Definieren Sie die Homotopiehochhebungseigenschaft für eine Abbildung $p\colon E \to Y$. Definieren Sie ferner den Begriff der Faserung.

(b) Definieren Sie den Abbildungswegeraum $E(f)$ einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$ als Unterraum von $X \times Y^{[0,1]}$.

(c) Sei mit $c_y \in Y^{[0,1]}$ der konstante Weg im Punkt $y \in Y$ bezeichnet. Zeigen Sie, dass die folgenden Abbildungen wohldefiniert und stetig sind:

$$X \xrightarrow{i} E(f) \qquad\qquad E(f) \xrightarrow{ev} Y$$
$$x \mapsto (x, c_{f(x)}) \qquad\qquad (x, \beta) \mapsto \beta(1)$$

(d) Zeigen Sie, dass die Komposition $ev \circ i$ die ursprüngliche Abbildung f ist.

(e) Zeigen Sie, dass die Abbildung i eine Homotopieäquivalenz ist. *

(f) Zeigen Sie, dass die Abbildung ev eine Faserung ist. *

* *In den letzten beiden Teilaufgaben müssen Sie* nicht *begründen, dass die von Ihnen konstruierten Homotopien stetig sind.*

2 | Fläche und Fläschchen (34 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition eines Zellkomplexes mit Hilfe von Anheftabbildungen und einer Filtrierung durch Skelette an.

(b) Definieren Sie den zellulären Komplex $C_\bullet(X)$ eines Zellkomplexes X, inklusive der Randabbildungen.

(c) Berechnen Sie die zelluläre Homologie des Torus $S^1 \times S^1$.

(d) Berechnen Sie die zelluläre Homologie der Kleinschen Flasche.

(Die Kleinsche Flasche K lässt sich zum Beispiel wie folgt konstruieren: Seien x, y die Koordinaten des euklidischen Raums $\mathbb{R}^2$. Betrachten Sie das Quadrat $[-1,1]^2 \subset \mathbb{R}^2$. Sie erhalten aus diesem Quadrat die Kleinsche Flasche, indem Sie in die linke Kante mit der rechten Kante mittels der Abbildung $(-1, y) \mapsto (1, y)$ identifizieren, und ferner die obere Kante mit der unteren Kante mittels der Abbildung $(x, 1) \mapsto (-x, -1)$ identifizieren.)

(e) Konstruieren Sie einen Zellkomplex X mit der Eigenschaft $H_i(X) = \mathbb{Z}$ für jedes $i \geq 0$. Gibt es auch einen Zellkomplex X mit der Eigenschaft $H_i(X) = \mathbb{Z}/2$ für jedes $i \geq 0$?

3 | Komplexe projektive Räume (26 Punkte)

(a) Definieren Sie den Begriff des Faserbündels.

(b) Definieren Sie für $n \geq 1$ den komplexen projektiven Raum $\mathbb{C}P^n$ als Quotienten von S^{2n+1}. Zeigen Sie, dass die Quotientenabbildung $S^{2n+1} \to \mathbb{C}P^n$ ein Faserbündel ist.

Tatsächlich handelt es sich sogar um ein numerables *Faserbündel. Das können Sie im Folgenden benutzen, ohne es nachzuweisen.*

(c) Geben Sie die lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen für ein numerables Faserbündel an.

(d) Berechnen Sie für $n \geq 1$ alle Homotopiegruppen $\pi_i(\mathbb{C}P^n)$ für $i \in \{1, \ldots, 2n+1\}$.

4 | Whitehead & co. (30 Punkte)

(a) Definieren Sie für $n \geq 1$, was es für einen topologischen Raum bedeutet, n-zusammenhängend zu sein. Definieren Sie ferner den Begriff der n-Äquivalenz und den Begriff der schwachen Äquivalenz.

Im Folgenden bezeichnet $[X, Y]$ die Menge der Homotopieklassen von Abbildungen von X nach Y. In der Vorlesung wurde gezeigt:

> *Ist $e\colon Y \to Z$ eine n-Äquivalenz, so ist $e_*\colon [X, Y] \to [X, Z]$ für jeden Zellkomplex der Dimension n surjektiv und für jeden Zellkomplex der Dimension kleiner als n bijektiv.*

Diesen Satz dürfen Sie in den folgenden Teilaufgabe benutzen.

(b) Formulieren und beweisen Sie den Satz von Whitehead über schwache Äquivalenzen zwischen Zellkomplexen.

(c) Sei Y ein n-zusammenhängender Raum, $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass jede Abbildung von einem Zellkomplex der Dimension $\leq n$ nach Y homotop zu einer konstanten Abbildung ist.

(d) Ist jede stetige Abbildung $\mathbb{R}P^2 \to S^3$ homotop zu einer konstanten Abbildung? Ist jede stetige Abbildung $\mathbb{R}P^2 \to \mathbb{R}P^3$ homotop zu einer konstanten Abbildung? Belegen Sie jeweils Ihre Antwort!