Topologie I: Klausur 2

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2017/2018

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telephonjoker etc.) zugelassen.

  Bitte legen Sie alle Taschen und Jacken vor Beginn der Klausur vorn im Hörsaal ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Ausnahmen: traditionelle Armbanduhren und Wecker.
- Bitte ergänzen Sie folgende Angaben.

  Name:
  Matrikelnr.:

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 4 Aufgaben. Insgesamt sind bis zu 120 Punkte zu erwerben. Der Punktwert der einzelnen Aufgaben ist jeweils angegeben. Ab 50 erreichten Punkten gilt die Klausur als bestanden.
- Sie können für die Lösung der Aufgaben jeden Satz aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form, d. h. unabhängig von der konkreten Aufgabenstellung, wiedergeben.
- Das Ergebnis der Klausur können Sie in einigen Wochen im online-Portal einsehen. Wenn Sie ein Pseudonym angeben, wird Ihr Ergebnis bereits vorher unter diesem Pseudonym auf der Webseite zur Vorlesung veröffentlicht.

  Pseudonym:

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte	18	20	40	42	120

1 | Nasenraum (18 Punkte)

(a) Definieren Sie den Abbildungszylinder $M(f)$ einer stetigen Abbildung $f\colon X \to Y$.

(b) Definieren Sie eine Homotopieäquivalenz $p\colon M(f) \to Y$. Zeigen Sie, dass es sich bei der von Ihnen definierten Abbildung tatsächlich um eine Homotopieäquivalenz handelt.

(c) Definieren Sie eine Abbildung $i\colon X \to M(f)$, für die folgendes Dreieck kommutiert:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & M(f) \arrow[ur, "p"'] & \end{tikzcd}$$

2 | Reverse Engineering (20 Punkte)

(a) Geben Sie die Definitionen eines Zellkomplexes mit Hilfe von Anheftabbildungen und einer Filtrierung durch Skelette an.

(b) Konstruieren Sie einen Zellkomplex X mit $H_i(X) = 0$ für $i \geq 5$ und folgenden Homologiegruppen in kleineren Graden:

$H_4(X)$	$H_3(X)$	$H_2(X)$	$H_1(X)$	$H_0(X)$
$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

(c) Zeigen Sie, dass es einen vier-dimensionalen Zellkomplex Y gibt mit $H_i(Y) = 0$ für $i \geq 4$ und folgenden Homologiegruppen in kleineren Graden:

$H_3(Y)$	$H_2(Y)$	$H_1(Y)$	$H_0(Y)$
$\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}/125\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

Gibt es auch einen drei-dimensionalen Zellkomplex mit diesen Homologiegruppen?

3 | Homotopie schlägt Homologie (40 Punkte)

In dieser Aufgabe vergleichen wir die Räume $S^2 \vee \mathbb{C}P^2$ und $S^2 \times S^2$.
Sie können die übliche Zellstruktur auf $\mathbb{C}P^2$ sowie die Zellstruktur auf S^2 mit nur zwei Zellen als bekannt voraussetzen. Ebenso als bekannt voraussetzen können Sie den Satz über induzierte Zellstrukturen auf Produkten und $\vee$-Produkten.

(a) Geben Sie für S^2, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \vee \mathbb{C}P^2$ und $S^2 \times S^2$ jeweils an, wie viele Zellen die Räume in jeder Dimension haben. Berechnen Sie die zelluläre Homologie von $S^2 \vee \mathbb{C}P^2$ und von $S^2 \times S^2$.

(b) Formulieren Sie den Satz über die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung $X \twoheadrightarrow B$. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Faserung die Homotopiegruppen $\pi_i(\mathbb{C}P^2)$ für $i = 1, \ldots, 5$.

(c) Formulieren Sie den Satz über die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares (X, A). Leiten Sie aus der Sequenz für Paare der Form $(X \times Y, X \vee Y)$ Isomorphismen

$$\pi_i(X \vee Y) \cong \pi_i(X) \oplus \pi_i(Y) \oplus \pi_{i+1}(X \times Y, X \vee Y)$$

für alle $i \geq 1$ her.

(d) Zeigen Sie, dass $\pi_5(S^2 \times S^2)$ und $\pi_5(S^2 \vee \mathbb{C}P^2)$ *nicht* isomorph sind. Sie können ohne Angabe von Gründen $\pi_5(S^2) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ verwenden.

4 | Fasern, Fasern, Fasern ... (42 Punkte)

(a) Geben Sie Definition einer Faserung und die Definition eines Faserbündels an.

(b) Zeigen Sie, dass für jedes Produkt $B \times F$ die kanonische Projektion $p_B \colon B \times F \to B$ eine Faserung und ein Faserbündel ist.

(c) Zeigen Sie, dass für jede stetige Abbildung $f \colon C \to B$ das folgende Quadrat ein Pullback-Diagramm ist:

$$\begin{tikzcd} C \times F \arrow[r, "f \times \mathrm{id}"] \arrow[d, "p_C"] & B \times F \arrow[d, "p_B"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Wieder sind π_B und π_C die kanonischen Projektionen.

(d) Sei nun ein Pullback-Diagramm wie folgt gegeben:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "p"] \\ C \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Zeigen Sie, dass q eine Faserung ist, falls p eine Faserung ist.
Zeigen Sie, dass q ein Faserbündel ist, falls p ein Faserbündel ist.