Topologie I: Klausur 1

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Wintersemester 2017/2018

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telephonjoker etc.) zugelassen.

  Bitte legen Sie alle Taschen und Jacken vor Beginn der Klausur vorn im Hörsaal ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Ausnahmen: traditionelle Armbanduhren und Wecker.
- Bitte ergänzen Sie folgende Angaben.

  Name:
  Matrikelnr.:

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 4 Aufgaben. Insgesamt sind bis zu 120 Punkte zu erwerben. Der Punktwert der einzelnen Aufgaben ist jeweils angegeben. Ab 50 erreichten Punkten gilt die Klausur als bestanden.
- Sie können für die Lösung der Aufgaben jeden Satz aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form, d. h. unabhängig von der konkreten Aufgabenstellung, wiedergeben.
- Das Ergebnis der Klausur können Sie in einigen Wochen im online-Portal einsehen. Wenn Sie ein Pseudonym angeben, wird Ihr Ergebnis bereits vorher unter diesem Pseudonym auf der Webseite zur Vorlesung veröffentlicht.

  Pseudonym:

Viel Erfolg!

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$
Punkte	28	40	22	30	120

1 | Kofaserungen (28 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer Kofaserung $A \rightarrowtail X$ an.

(b) Weisen Sie anhand der Definition nach, dass die Inklusion eines Randpunktes in das abgeschlossene Intervall $\{0\} \to [0,1]$ eine Kofaserung ist.

(c) In der Vorlesung wurde ein Satz über die Stabilität von Kofaserungen unter Pushouts gezeigt. Formulieren Sie den Satz im Detail und beweisen Sie ihn.

(d) Definieren Sie den Kegel CX über einem Raum X. Zeigen Sie, dass die kanonische Inklusion der Kegelspitze in den Kegel stets eine Kofaserung ist.

2 | Homotopie schlägt Homologie (40 Punkte)

In dieser Aufgabe vergleichen wir die Räume $\mathbb{C}P^2$ und $S^2 \vee S^4$.

(a) Geben Sie für die komplexe projektive Ebene $\mathbb{C}P^2$ eine Zellstruktur an, indem Sie für jede Zelle eine charakteristische Abbildung oder eine Anheftabbildung angeben. Sie brauchen nicht nachzuweisen, dass es sich tatsächlich um eine Zellstruktur handelt.

Berechnen Sie anschließend anhand der von Ihnen gewählten Zellstruktur die zelluläre Homologie von $\mathbb{C}P^2$.

(b) Berechnen Sie gleichermaßen die zelluläre Homologie von $S^2 \vee S^4$.

(c) Formulieren Sie den Satz über die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung $X \twoheadrightarrow B$. Berechnen Sie mit Hilfe einer geeigneten Faserung die Homotopiegruppen $\pi_i(\mathbb{C}P^2)$ für $i = 1, \dots, 5$.

(d) Formulieren Sie den Satz über die lange exakte Homotopiesequenz eines Paares (X, A). Berechnen Sie die Homotopiegruppen $\pi_i(S^2 \vee S^4)$ für $i = 1, 2, 3$.

(e) Sind Zellkomplexe mit isomorphen Homologiegruppen notwendigerweise homotopieäquivalent?

3 | Reelle projektive Räume (22 Punkte)

In dieser Aufgabe vergleichen wir die Räume S^n und $\mathbb{R}P^n$.

(a) Definieren Sie die reellen projektiven Räume $\mathbb{R}P^n$ für $n \geq 1$.

(b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^1$ homöomorph ist zu S^1. Geben Sie ohne Beweis die Homotopiegruppen von $\pi_i(\mathbb{R}P^1)$ für $i \geq 1$ an.

(c) Berechnen Sie die Homotopiegruppen von $\mathbb{R}P^n$ für $n \geq 2$ und $i = 1, \dots, n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{R}P^2$ *nicht* homöomorph ist zu S^2.

4 | Überlagerungen von Zellkomplexen (30 Punkte)

In dieser Aufgabe betrachten wir eine e-fache Überlagerung $p\colon E \to X$ eines endlichen Zellkomplexes X.

(a) Geben Sie die Definition eines Zellkomplexes X mit Hilfe charakteristischer Abbildungen $D^n \to X$ und einer Zerlegung von X in (mengentheoretisch) disjunkte offene Zellen an. Achten Sie in Ihren Formulierungen auf eine strikte Unterscheidung zwischen den offenen Zellen von X und den Zellabschlüssen.

(b) Geben Sie für obige Überlagerung eine Zellstruktur auf E an, bezüglich derer p eine zelluläre Abbildung ist. Zeigen Sie, dass die Einschränkung jeder charakteristischen Abbildung $D^n \to E$ auf das Innere der Scheibe D^n jeweils einen Homöomorphismus auf ihr Bild definiert.

Sie müssen nicht *nachweisen, dass es sich tatsächlich um eine Zellstruktur handelt.*

Illustrieren Sie Ihre Konstruktion am Beispiel der dreifachen zusammenhängenden Überlagerung von S^1 durch eine Skizze.

(c) Die Euler-Charakteristik eines endlichen Zellkomplexes X mit jeweils d_n Zellen der Dimension n ist definiert als die Wechselsumme

$$\chi(X) := \sum_n (-1)^n d_n.$$

Geben Sie für die gegebene Überlagerung $E \to X$ und die von Ihnen konstruierte Zellstruktur auf E eine Gleichung für $\chi(E)$ in Abhängigkeit von e und $\chi(X)$ an.

(d) Zeigen Sie, dass Ihre Gleichung plausibel ist, indem Sie für die kanonische Überlagerung $S^2 \twoheadrightarrow \mathbb{R}P^2$ beide Seiten explizit berechnen.