Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Peter Arndt

Wintersemester 2017
23.01.2018

Topologie I
Extrablatt

★ Spaltprodukt

Für $n \geq 2$ ist $\pi_n(X \vee Y) \cong \pi_n(X) \oplus \pi_n(Y) \oplus \pi_{n+1}(X \times Y, X \vee Y)$. Insbesondere gilt für $n \geq 2$:

$$\pi_n(S^n \vee S^n) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.$$

★ Wildfang

Die Homotopiegruppe $\pi_7(S^4)$ ist nicht endlich.

Verwendet man statt der reellen Zahlen (Aufgabe 22) oder der komplexen Zahlen (Aufgabe 26) die Quaternionen, erhält man zusätzlich zu den Hopfbündeln $S^1 \twoheadrightarrow S^1$ und $S^3 \twoheadrightarrow S^2$ aus Aufgabe 31 ein Hopfbündel

$$\begin{tikzcd} S^3 \arrow[r] & S^7 \arrow[d] \\ & S^4 \end{tikzcd}$$

Das kann in dieser Aufgabe verwendet werden.

★ Variationen

Sei R ein kommutativer Ring, X ein topologischer Raum. Die **Homologie von X mit Koeffizienten in R** lässt sich konstruieren, indem wir statt des gewöhnlichen zellulären Kettenkomplexes $C_*(X)$ den Komplex von R-Moduln $C_*(X;R) := C_*(X) \otimes R$ verwenden. Es ist also

$$C_n(X;R) := \bigoplus_{\substack{n\text{−Zellen} \\ \text{von } X}} R,$$

das Differential hat die gleiche Form wie zuvor, und

$$H_n(X;R) := H_n(C_*(X;R)).$$

Was ergibt sich für $H_*(S^n;\mathbb{Z}/2)$ und $H_*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Z}/2)$?
Was ergibt sich für $H_*(S^n;\mathbb{Q})$ und $H_*(\mathbb{R}P^n;\mathbb{Q})$?

★ Charakterstudie

Für die Eulercharakteristik $\chi(X)$ eines endlichen Zellkomplexes X gilt:

$$\chi(X) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(X;\mathbb{Q}).$$

Insbesondere ist die Eulercharakteristik unabhängig von der gewählten Zellstruktur.
