

## Topologie I Blatt 12

---

### 45 | Phantomkomplex

Ist jeder Morphismus von Kettenkomplexen, der auf der Homologie die Nullabbildung induziert, kettenhomotop zur Nullabbildung? Ist jeder Morphismus von Kettenkomplexen, der auf der Homologie Isomorphismen induziert, eine Kettenhomotopieäquivalenz?

### 46 | Take Five!

In folgendem kommutativen Leiterdiagramm von Moduln und Modulhomomorphismen seien die Zeilen kurze exakte Sequenzen:

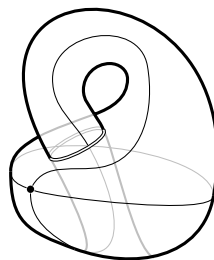
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & C' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Sind die beiden äußeren Homomorphismen  $\alpha$  und  $\gamma$  Isomorphismen, so ist auch der mittlere Homomorphismus  $\beta$  ein Isomorphismus. Gilt auch die Umkehrung?

*Wir werden die Homologie eines Zellkomplexes als die Homologie seines zellulären Kettenkomplexes definieren. Das ist in den nachfolgenden beiden Aufgaben bereits zu verwenden.*

### 47 | Windungen

Welche Homologie hat die Kleinsche Flasche?



### 48 | Sisyphos ...

... wusste fast nichts über die Homologie topologischer Räume, kannte aber erstaunlicherweise obige Definition mittels des zellulären Kettenkomplexes. Die Homologie von  $\mathbb{R}$  konnte er dementsprechend nur mit Hilfe einer Zellzerlegung berechnen. Achilleus, dem die Rechnungen von Sisyphos in die Hände gerieten, wurde von ihnen zu einem Beweis der folgenden Aussage inspiriert:

Für jeden zusammenhängenden Zellkomplex  $X$  ist  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Leider sind beide Manuskripte verloren gegangen. Können Sie sie rekonstruieren?