Heinrich-Heine-Universität
Marcus Zibrowius
Peter Arndt

Wintersemester 2017
5.12.2017

Topologie I
Blatt 9

33 | Glasperlen

Alle Homotopiegruppen von $\mathbb{C}P^n$ lassen sich durch Homotopiegruppen von Sphären ausdrücken.

34 | Mehrzeller

Der reelle projektive Raum $\mathbb{R}P^n$ lässt sich aus dem reellen projektiven Raum $\mathbb{R}P^{n-1}$ durch „Anheften einer n-Zelle“ konstruieren. Das heißt, dass es ein Pushoutdiagramm der folgenden Form gibt:

$$\begin{tikzcd} S^{n-1} \arrow[r, tail] \arrow[d] & D^n \arrow[d] \\ \mathbb{R}P^{n-1} \arrow[r, tail] & \mathbb{R}P^n \end{tikzcd}$$

Hier ist die obere Kofaserung die Inklusion der Sphäre S^{n-1} in D^n als Rand. Der linke vertikale Pfeil ist das Faserbündel aus Aufgabe 28, die kanonische zweifache Überlagerung.

35 | Verwirrhinweis

Wir werden später in der Vorlesung sehen: $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Aus diesem Resultat folgt:

$$\pi_n(\mathbb{R}P^n/\mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$$
$$\pi_n(\mathbb{R}P^n, \mathbb{R}P^{n-1}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

36 | Unendliche Weiten

Genau wie die unendlich-dimensionale Sphäre S^∞ können wir auch unendlich-dimensionale reelle und komplexe projektive Räume definieren:

$$\mathbb{R}P^\infty := \operatorname{colim}\left(\mathbb{R}P^0 \hookrightarrow \mathbb{R}P^1 \hookrightarrow \mathbb{R}P^2 \hookrightarrow \cdots\right)$$
$$\mathbb{C}P^\infty := \operatorname{colim}\left(\mathbb{C}P^0 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow \mathbb{C}P^2 \hookrightarrow \cdots\right)$$

Damit erhalten wir Faserbündel:

$$\begin{tikzcd} S^0 \arrow[r] & S^\infty \arrow[d, two heads] \\ & \mathbb{R}P^\infty \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] & S^\infty \arrow[d, two heads] \\ & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

Abgabefrist: 12.12.2017, 10:30 Uhr. Bitte werfen Sie Ihre Lösungen in Briefkasten 163 ein.