Aufg. 20 Wir betrachten die Abbildungen

$$\underline{\mathrm{Top}}(X \amalg Y, Z) \xrightarrow{Q} \underline{\mathrm{Top}}(X, Z) \times \underline{\mathrm{Top}}(Y, Z)$$
$$f: X \amalg Y \to Z \longmapsto (X \underset{i_X}{\hookrightarrow} X \amalg Y \xrightarrow{f} Z, \; Y \underset{i_Y}{\hookrightarrow} X \amalg Y \to Z)$$
$$= (f \circ i_X, f \circ i_Y)$$

[Dabei ist $\underline{\mathrm{Top}}(A, B) = \{ f: A \to B \mid f \text{ stetig} \}$
mit der Topologie erzeugt durch die Mengen
$M(K, U) := \{ f: A \to B \mid f \text{ stetig}, \; f(K) \subseteq U \}$ $\quad K \subseteq A$ kompakt, $U \subseteq B$ offen]

und

$$\underline{\mathrm{Top}}(X, Y \times Z) \xrightarrow{P} \underline{\mathrm{Top}}(X, Y) \times \underline{\mathrm{Top}}(X, Z)$$
$$f: X \to Y \times Z \longmapsto (X \xrightarrow{f} Y \times Z \xrightarrow{pr_Y} Y, \; X \xrightarrow{f} X \times Y \xrightarrow{pr_Z} Z)$$
$$= (pr_Y \circ f, pr_Z \circ f)$$

Nach der universellen Eigenschaft des Koprodukts (bzw. Produkts) gibt es für jedes Paar stetiger Abb. $(X \xrightarrow{g} Z, Y \xrightarrow{h} Z)$ (bzw. $(X \xrightarrow{g} Y, X \xrightarrow{h} Z)$) genau eine Abb. $X \amalg Y \xrightarrow{f} Z$ mit $g = f \circ i_X$ und $h = f \circ i_Y$ (bzw. $g = pr_Y \circ f$ und $h = pr_X \circ f$).

Dies sagt genau, dass die beiden obigen Abb. bijektiv sind.

Nach Vorlesung ist für jedes $T \xrightarrow{g} A$ die Abb. $\underline{\mathrm{Top}}(A, B) \to \underline{\mathrm{Top}}(T, B)$, $f \mapsto f \circ g$

(bzw. $\underline{\mathrm{Top}}(S, T) \to \underline{\mathrm{Top}}(S, A)$, $f \longmapsto g \circ f$) stetig, also sind obige Abb. stetig.

Die erste Abb. ist für beliebige Räume ein Homöomorphismus:

Es reicht zz, dass die Abb. Q offen ist und dafür reicht zz, dass sie die erzeugenden offenen Mengen $M(K,U)$ auf offene Mengen schickt.

Seien also $K \subseteq X \amalg Y$ kompakt und $U \subseteq Z$ offen.

Dann gilt $Q(M(K,U)) = Q(\{f : X \amalg Y \to Z \mid f(K) \subseteq U\})$

$$= \{(g,h) \mid g(K \cap X) \subseteq U \text{ und } h(K \cap Y) \subseteq U\}$$

$$= M(K \cap X, U) \times M(K \cap Y, U)$$

hier $g : X \to Z$, $h : Y \to Z$

Da $K \cap X$, $K \cap Y$ kompakt sind in X bzw. Y, sind $M(K \cap X, U)$, $M(K \cap Y, U)$ offen, also auch das Produkt.

Wenn X lokal kompakt ist, dann ist die zweite Abb. P ein Homöomorphismus:

Wieder zeigen wir dass P offen ist. Sei $M(K,U) \subseteq \mathrm{Top}(X, Y \times Z)$.
$K \subseteq X$ kompakt
$U \subseteq X \times Y$ offen.

Nach Def. der Produkttopologie ist $U = \bigcup_{j \in J} U_j \times V_j$ für offene Mengen $U_j \subseteq Y$, $V_j \subseteq X$.

Sei $(g,h) \in P(M(K,U))$, d.h. $g = pr_Y \circ f$, $h = pr_Z \circ f$ für ein f mit $f(K) \subseteq U$. Es ist $\left(f^{-1}(U_j \times V_j) \cap K =: \tilde{K}_j\right)_{j \in J}$ eine offene Überdeckung von K, diese hat eine endliche Teilüberdeckung, da K kompakt. Wähle um jeden Punkt in einem $\tilde{K}_j$ eine kompakte Umgebung (geht, da X lokal kompakt !).

Wegen Kompaktheit von K bekommt man eine endliche Überdeckung $K = \bigcup_{i=1}^{m} K_i$ durch kompakte K_i, so dass $g(K_i) \subseteq U_{n_i}$ und $h(K_i) \subseteq V_{n_i}$ für irgendwelche $n_i \in J$.

Dann ist $(g,h) \in \bigcap_{i=1}^{m} \underbrace{M(K_i, U_{n_i}) \times M(K_i, V_{n_i})}_{\text{offene Menge}} \subseteq P(M(K,U))$ $\square$