Zu Aufgabe 8

$X \subseteq \mathbb{R}^n$, $\quad X\times[0,1] \xrightarrow{f} \mathbb{R}^{n+1}$, $\quad (x,t) \longmapsto ((1-t)\cdot x,\, t)$ $\qquad$ Ist f Identifizierung? (als Abb. $X\times[0,1] \xrightarrow{f} \text{Bild}(f)$)

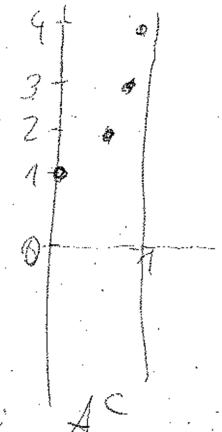
Erinnerung: f Identifizierung $:\Longleftrightarrow$ $\big(U \subseteq \text{Bild}(f)$ offen $\Longleftrightarrow f^{-1}(U) \subseteq X\times[0,1]$ offen $\big)$

Gegenbsp.: $X = \mathbb{R}$, also $f : \mathbb{R}\times[0,1] \to \mathbb{R}^2$

$(\ast)$ Beobachtung: $f|_{\mathbb{R}\times[0,1)}$ ist Homöomorphismus auf sein Bild;

die Umkehrabb. ist $(y,t) \longmapsto \left(\frac{1}{1-t}\cdot y,\, t\right)$

Betrachte $A := \{ (n, 1-\frac{1}{n^2}) \mid n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \}$



A ist abg. in $\mathbb{R}\times[0,1]$: Zu jedem Punkt p im Komplement A^c gibt es einen nächsten Punkt q in A. ~~[illegible]~~

Der offene Ball $B_{\|p-q\|}(p)$ liegt ganz in A^c.

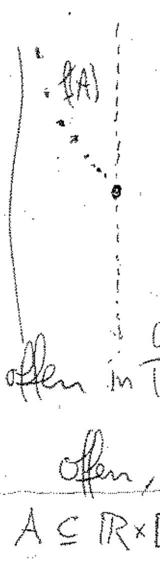
Also ist A^c offen.

Betrachte nun $f(A)$: Es ist $f(n, 1-\frac{1}{n^2}) = \left((1-(1-\frac{1}{n^2}))\cdot n,\, 1-\frac{1}{n^2} \right)$

$= \left(\frac{1}{n},\, 1-\frac{1}{n^2} \right)$

In der Unterraumtopologie bzgl. $\mathbb{R}^2$ konvergiert die Folge $\left(f(n, 1-\frac{1}{n^2})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $(0,1)$

(Beachte: Es ist $\text{Bild}(f) = \mathbb{R}\times[0,1) \cup \{(0,1)\}$)



Das Komplement $f(A)^c$ enthält $(0,1)$, aber jeder ε-Ball um $(0,1)$ schneidet $f(A)$ $\Longrightarrow$ $f(A)^c$ ist <u>nicht</u> offen in der Teilraumtop.

Andererseits ist $f^{-1}(f(A)^c) = f^{-1}(f(A))^c \underset{\uparrow}{=} A^c$ offen,

also $f(A)^c$ offen in der koinduzierten Topologie. (Da $f|_{\mathbb{R}\times[0,1)}$ bijektiv und $A \subseteq \mathbb{R}\times[0,1)$)