? 0

Einführung in die Topologie
Klausur 1

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Sommersemester 2019

- Öffnen Sie den Klausurbogen erst, wenn der Klausurbeginn angesagt wurde!
- Es sind keine Hilfsmittel (Taschenrechner, Mitschriften, Notizen, Telephonjoker etc.) zugelassen.

  Bitte legen Sie alle Taschen und Jacken vor Beginn der Klausur vorn im Hörsaal ab. Handys, Smartphones und andere elektronische Geräte sind in ausgeschaltetem Zustand in diesen Taschen zu verstauen. Ausnahmen: traditionelle Armbanduhren und Wecker.
- Bitte prüfen und korrigieren Sie gegebenenfalls die folgenden Angaben.

  Name: ? ?
  Matrikelnr.: ?

  Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis und Ihren Lichtbildausweis vor sich auf das Pult, damit Ihre Identität während der Klausur geprüft werden kann.
- Die Klausur dauert 2 Stunden. Sie besteht aus 4 Aufgaben, in denen jeweils bis zu 30 Punkte zu erwerben sind. Insgesamt sind also bis zu 120 Punkte zu erwerben. Ab 50 erreichten Punkten gilt die Klausur als bestanden.

  Nicht alle Aufgaben sind gleich schwer. Bei jeder Aufgabe ist ein unverbindlicher Richtwert angegeben, wie viel Zeit wir zur Bearbeitung empfehlen.
- Sofern nicht in der Aufgabenstellung anders angeben, können Sie für Ihre Lösung jeden Satz aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden, sofern Sie ihn separat in seiner allgemeinen Form, d. h. unabhängig von der konkreten Aufgabenstellung, wiedergeben.
- Das Ergebnis der Klausur können Sie in einigen Wochen im online-Portal einsehen. Wenn Sie unten ein Pseudonym angeben, wird Ihr Ergebnis bereits vorher unter diesem Pseudonym auf der Webseite zur Vorlesung veröffentlicht. Viel Erfolg!

  Pseudonym:

Aufgabe	1	2	3	4	Σ
Punkte	30	30	30	30	120

1 | Eigenschaften topologischer Räume (ca. 20 Minuten, 30 Punkte)

(a) Definieren Sie, was es für einen topologischen Raum bedeutet, *kompakt* zu sein.

(b) Definieren Sie, was es für einen nicht-leeren topologischen Raum bedeutet, *zusammenhängend* zu sein.

Beweisen oder widerlegen Sie sodann die folgenden Behauptungen. In den negativen Fällen reicht jeweils eine kurze, stichhaltige Begründung.

(c) Das abgeschlossene Intervall $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ ist homöomorph zum offenen Intervall $(0, 1)$.

(d) Das offene Intervall $(0, \pi)$ ist homöomorph zu $\mathbb{R}$.

(e) Die Sphäre S^2 ist homöomorph zu $\mathbb{R}^2$.

(f) Die reelle Gerade $\mathbb{R}$ ist homöomorph zum Unterraum $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$.

Beweisen oder widerlegen Sie ferner jeweils die folgenden Behauptungen. Ist die Behauptung richtig, ist ein Beweis gefragt (und nicht etwa ein Zitat eines entsprechenden Satzes aus der Vorlesung). Ist die Behauptung falsch, ist ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben.

(g) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Für jeden zusammenhängenden Teilraum $B \subset Y$ ist das Urbild $f^{-1}(B)$ zusammenhängend.

(h) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung. Für jeden zusammenhängenden Teilraum $A \subset X$ ist das Bild $f(A)$ zusammenhängend.

2 | Homotopieäquivalenzen (ca. 30 Minuten, 30 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer Homotopie zwischen zwei stetigen Abbildungen an.

(b) Geben Sie die Definition einer Homotopieäquivalenz zwischen zwei topologischen Räumen an.

Beweisen oder widerlegen Sie sodann die folgenden Behauptungen. Geben Sie dazu in den positiven Fällen konkrete Homotopien an.

(c) Die punktierte reelle Gerade $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist homotopieäquivalent zum Kreis S^1.

(d) Die punktierte reelle Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ist homotopieäquivalent zum Kreis S^1.

(e) Der Unterraum $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ ist homotopieäquivalent zu seinem Komplement $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.

(f) Der Kreis S^1 ist homotopieäquivalent zur Sphäre S^2.

Beweisen oder widerlegen Sie ferner die folgende Behauptung. Ist die Behauptung richtig, ist ein Beweis gefragt (und nicht etwa ein Zitat eines entsprechenden Satzes aus der Vorlesung). Ist die Behauptung falsch, ist ein konkretes Gegenbeispiel anzugeben.

(g) Jede offene Teilmenge eines zusammenziehbaren Raums ist zusammenziehbar.

3 | Fundamentalgruppen (ca. 35 Minuten, 30 Punkte)

Geben Sie ohne Beweis die Fundamentalgruppen der folgenden Räume an:

(a) Einpunktraum: $\{*\}$

(b) Kreis: S^1

(c) Wedgeprodukt zweier Kreise: $S^1 \vee S^1$

Berechnen Sie ferner die Fundamentalgruppen der folgenden Räume. Sie dürfen ihre Antworten zu (a)–(c) hierbei benutzen und müssen *nicht* alle Homotopien, die Sie verwenden, konkret angeben.

(d) offenes Quadrat: $(-1,1)^2 = (-1,1) \times (-1,1)$

(e) punktiertes offenes Quadrat: $(-1,1)^2 \setminus (\{0\} \times \{0\})$

(f) zweifach punktiertes offenes Quadrat: $(-1,1)^2 \setminus (\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \times \{0\})$

(g) offener Würfel: $(-1,1)^3 = (-1,1) \times (-1,1) \times (-1,1)$

(h) offener Würfel, aus dem eine Achse entfernt wurde:
$(-1,1)^3 \setminus (\{0\} \times \{0\} \times (-1,1))$

(i) offener Würfel, aus dem zwei parallele Achsen entfernt wurden:
$(-1,1)^3 \setminus (\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \times \{0\} \times (-1,1))$

(j) offener Würfel, aus dem ein kleiner Kreis entfernt wurde:
$(-1,1)^3 \setminus \{(x,y,0) \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{2}\}$

4 | Überlagerungen (ca. 35 Minuten, 30 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer Überlagerung an.

Beweisen oder widerlegen Sie sodann die folgenden Behauptungen:

(b) Es gibt eine dreifache Überlagerung $X \to S^2$ derart, dass X zusammenhängend ist.

(c) Es gibt eine Überlagerung $S^1 \times S^1 \to \mathbb{RP}^2$.

(d) Es gibt eine Überlagerung $S^2 \to \mathbb{RP}^2$.

(e) Ist $X \to Y$ eine Überlagerung derart, dass X und Y kompakt sind, so sind die Fasern endlich.