

Einführung in die Topologie Blatt 12

★ Obertöne

Die folgenden Notenlinien laden ein zu einer Vertonen der Definition einer Überlagerung.

Five sets of empty musical staves, each consisting of five horizontal lines, provided for writing the solution to the 'Obertöne' problem.

45 | Abzählreim

In einer Überlagerung von B ist die Mächtigkeit der Fasern über jeder Zusammenhangskomponente von B konstant. Das lässt sich direkt anhand der (vertonten oder unvertonten) Definition beweisen.

46 | Regelfall

Ein stetige Abbildung $X \rightarrow Y$ ist ein **lokaler Homöomorphismus**, falls jeder Punkt in X eine Umgebung besitzt, die homöomorph auf eine Umgebung seines Bildes abgebildet wird. Jeder lokale Homöomorphismus zwischen kompakten Hausdorff-Räumen mit endlichen Fasern ist eine Überlagerung.

★ Störfall

Es gibt einen surjektiven lokalen Homöomorphismus mit endlichen Fasern, der keine Überlagerung ist.

47 | Kreisverkehr

Sei $p: X \rightarrow B$ eine Überlagerung. Die **Decktransformationsgruppe** $\text{Aut}(p)$ ist die Automorphismengruppe von p in der Kategorie der Überlagerungen von B . Offenbar handelt es sich um eine Untergruppe der Homöomorphismengruppe von X . Für zusammenhängendes X ist $\text{Aut}(p)$ bezüglich der KO-Topologie diskret.

Sei $e_n: S^1 \rightarrow S^1$ die durch $z \mapsto z^n$ gegebene Überlagerung ($n \neq 0$). Die Überlagerungen e_n und e_{-n} sind isomorph. Welche Struktur hat die Decktransformationsgruppe $\text{Aut}(e_n)$?

48 | Doppeldecker

In der Skizze rechts ist eine zweifache Überlagerung der Kleinschen Flasche durch den Torus angedeutet. Wie lässt sich diese Abbildung konkreter (z. B. in Koordinaten) beschreiben? Welchen Homomorphismus induziert diese Abbildung auf den Fundamentalgruppen?

Auf der Kleinschen Flasche hat ferner das Nasobem einige dreieckige Fußstapfen hinterlassen. Wie lässt sich der Weg des Nasobems konkreter (z. B. in Koordinaten) beschreiben? Wie lassen sich alle Hochhebungen dieses Weges beschreiben? Wie sehen diese Hochhebungen in der üblichen Darstellung des Torus als Unterraum von \mathbb{R}^3 aus? (Gefragt ist im letzten Aufgabenteil nach einer Skizze.)

