Erinnerung: $\mathbb{F}$ Körper, $\operatorname{char} \mathbb{F} \neq 2$

z.B. $x_1^2 + 3x_2^2 + x_1 x_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{tikzcd} \left\{\begin{array}{c}\text{quadratische Polynome}\\ \in \mathbb{F}[x_1,\dots,x_n]\end{array}\right\} \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] \arrow[d] & \left\{\text{symmetrische Matrizen}/\mathbb{F}\right\} \arrow[d] \\ \left\{\begin{array}{c}\text{quadratische Abbildungen}\\ q: V \to \mathbb{F}\end{array}\right\}/\text{Äquiv} \arrow[u, bend left, dashed] \arrow[r, leftrightarrow, "1:1"] & \left\{\begin{array}{c}\text{quadratische Räume}\\ B: V\times V \to \mathbb{F}\end{array}\right\}/\text{Äquiv.} \arrow[u, bend left, dashed] \end{tikzcd}$$

$(B(e_i, e_j))$

$\uparrow$ Basiswahl $e_1, \dots, e_n$

B

M $n\times n$

$\downarrow$

$\left(\begin{array}{l} \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F} \\ (v, w) \mapsto {}^t v M w \end{array}\right)$

$q_B(v) := B(v,v) \quad \longmapsfrom \quad B$

~~Einfachste~~ Alle Beispiele: Diagonalformen

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2 \;\hat{=}\; \begin{pmatrix} a_1 & & & & 0 \\ & a_2 & & & \\ & & a_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & a_n \end{pmatrix} =: \langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$$

$(a_i \in \mathbb{F})$

Satz des Tages: Für jeden quadratischen Raum $B: V \times V \to \mathbb{F}$ existiert eine Basis $e_1, \dots, e_n$, in der $B(e_i, e_j)$ Diagonalmatrix ist.

Def: Wertemenge

$F \setminus \{0\}$

$$D(V,q) := \{ d \in \dot{F} \mid \exists \underline{v} \in V : q(v) = d \}$$

$$D(V,B) := D(V, q_B)$$

Bsp:

x^2

$$D(\langle 1 \rangle) = \dot{F}^2 = \begin{cases} \dot{\mathbb{C}} & F = \mathbb{C} \\ \mathbb{R}_{>0} & F = \mathbb{R} \\ \{ q \in \mathbb{Q}_{>0} \mid \sqrt{q} \in \mathbb{Q} \} & F = \mathbb{Q} \\ \{ [1] \} & F = \mathbb{F}_3 \\ \{ [1], [4] \} & F = \mathbb{F}_5 \end{cases}$$

ax^2

$$D(\langle a \rangle) = a \cdot \dot{F}^2$$

$x^2 + y^2$

$$D(\langle 1, 1 \rangle) = \begin{cases} \dot{\mathbb{C}} & F = \mathbb{C} \\ \mathbb{R}_{>0} & F = \mathbb{R} \\ ??\ \text{kompliziert} & F = \mathbb{Q} \\ \{ [1], [2] \} = \dot{F} & F = \mathbb{F}_3 \\ \{ [1], [2], [3], [4] \} = \dot{F} & F = \mathbb{F}_5 \end{cases}$$

$[4] + [4]$

Equivalently, if $p \neq 0$, then $\frac{p}{q}$ is a sum of the squares of two rationals if and only if every prime divisor of pq of the form $4k + 3$ occurs to an even power.

https://math.stackexchange.com/a/1445105/90567

Beobachtungen:

① $\emptyset = D(q) \iff q = 0$

② $d \in D(q) \iff d \cdot \dot{\mathbb{F}}^2 \subseteq D(q)$

③ $D(q)$ hängt nur von Äquivalenzklasse von q ab.

(1: $q \neq 0 \iff \exists \underline{v}: q(\underline{v}) \in \dot{\mathbb{F}}$
2: $q(\underline{v}) = d \implies q(a \cdot \underline{v}) = a^2 \cdot d \quad \forall a \in \dot{\mathbb{F}}$
3: Falls $q'(-) = q(C \cdot -)$, dann
$q'(\underline{v}) = d \iff q(C \cdot \underline{v}) = d$)

Darstellungskriterium:

$$d \in D(V,B)$$
$$\Updownarrow$$
$$(V,B) \cong \underbrace{\langle d \rangle \perp (V',B')}_{\left(\mathbb{F} \oplus V',\ \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}\right)}$$ für einen Raum (V',B')

Beweis:

($\Uparrow$) Wähle $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ \underline{0} \end{pmatrix}$.

($\Downarrow$) $\exists \underline{v}$: $B(\underline{v}, \underline{v}) = d$

$$V' := \ker \left(\begin{array}{ccc} V & \longrightarrow & \mathbb{F} \\ \underline{w} & \longmapsto & B(\underline{v}, \underline{w}) \end{array} \right)$$ $\square$

Der Satz des Tages folgt hieraus unmittelbar durch Induktion.

Def: (V,B) ist

regulär, falls M_B invertierbar (für eine $\Leftrightarrow$ jede Basis)

Äquivalent: falls $\forall \underline{v} \neq \underline{0}\ \exists \underline{w}:$ $B(\underline{v},\underline{w}) \neq 0$

anisotrop, falls $\forall \underline{v} \neq 0: B(\underline{v},\underline{v}) \neq 0$

isotrop, falls $\exists \underline{v} \neq 0: B(\underline{v},\underline{v}) = 0$

(rein isotrop, falls $B=0$)

Beispiele:

$\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ regulär $\Leftrightarrow$ alle $a_i \neq 0$

$\langle a \rangle$ mit $a \neq 0$: regulär + anisotrop

$\langle 1,-1 \rangle$ regulär + isotrop: $(1\ 1)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = (1\ 1)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 0$

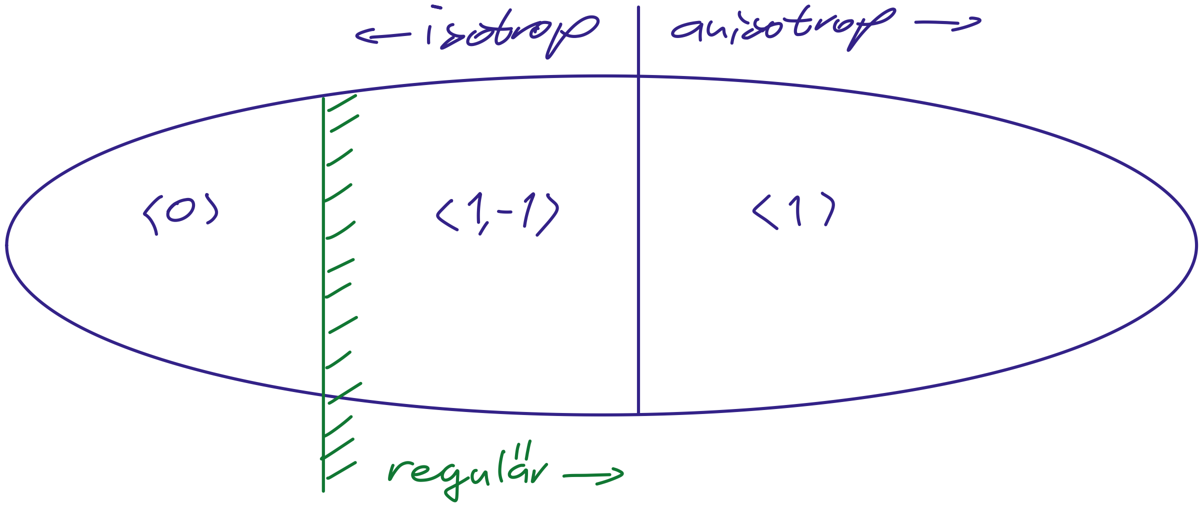
$\cong$ 1. Vortrag

$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$

⚠ $B(\underline{v}_i,\underline{v}_i) \neq 0$ für Basisvektoren reicht nicht für Anisotropie!

Es ist aber notwendig. Daher sieht man in Diagonalgestalt sofort:

Beobachtung: anisotrop $\Rightarrow$ regulär



Satz:

(V,B) regulär + isotrop $\Rightarrow$ $D(V,B) = \dot{\mathbb{F}}$

(V,B) „universell“

Beweis:

Sei $d \in \dot{\mathbb{F}}$ beliebig.

$\exists\, \underline{v} \neq \underline{0}$ mit $B(\underline{v},\underline{v}) = 0$ und

$\exists\, \underline{w}$ mit $B(\underline{v},\underline{w}) \neq 0$.

Betrachte $\underline{u}_t := t \cdot \underline{v} + \underline{w}$ für $t \in \mathbb{F}$:

$$B(\underline{u}_t, \underline{u}_t) = 2t\, B(\underline{v},\underline{w}) + B(\underline{w},\underline{w})$$

Für $t := \frac{1}{2} B(\underline{v},\underline{w})^{-1}\big(d - B(\underline{w},\underline{w})\big)$ ergibt sich:

$$B(\underline{u}_t, \underline{u}_t) = d$$

□

Erster Darstellungssatz:

Für regulären Raum (V,B), $d \in \dot{\mathbb{F}}$ gilt:

$$d \in D(V,B)$$
$$\Updownarrow$$
$$\langle -d \rangle \perp (V,B) \text{ isotrop.}$$

Beweis, Teil I:

($\Downarrow$) Laut Kriterium oben ist
$\langle -d \rangle \perp (V,B) \cong \langle d,-d \rangle \perp (V',B')$ und

$$(1\ 1\ 0 \dots 0) \begin{pmatrix} d & & \\ & -d & \\ & & B' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = (1\ 1) \begin{pmatrix} d \\ -d \end{pmatrix} = 0$$

($\Uparrow$) $\exists\ \underline{w} = \begin{pmatrix} a \\ \underline{v} \end{pmatrix} \in \mathbb{F} \oplus V$: $\quad a^2 \cdot d = B(\underline{v},\underline{v})$
$\underline{w} \neq \underline{0}$

Falls $\underline{v} = \underline{0}$, folgt $a = 0$, also $\underline{w} = \underline{0}$ ↯.
Also $\underline{v} \neq \underline{0}$.

Falls $B(\underline{v},\underline{v}) = 0$, ist B regulär + isotrop.
Also $\exists$ nach Satz oben $d \in D(V,B)$.

Falls $B(\underline{v},\underline{v}) \neq 0$ folgt $a^2 \cdot d \in D(V,B)$,
also auch $d \in D(V,B)$.

$\square$

Aufgabe 1: Sei (V,B) regulär.

$$-b \in D\big((V,B) \perp \langle a \rangle\big)$$
$$\Updownarrow$$
$$-a \in D\big((V,B) \perp \langle b \rangle\big)$$

Lösung:

Beide Bedingungen sind laut Erstem Darstellungssatz äquivalent zu:

$$\langle a, b \rangle \perp (V,B) \text{ isotrop}$$

$\square$

Aufgabe 2: $a, b \in \dot{F}$

① $b \in D(\langle 1, a\rangle) \iff b \cdot \langle 1, a\rangle \cong \langle 1, a\rangle$

② $D(\langle 1, a\rangle) \cap D(\langle 1, b\rangle) \subseteq D(\langle 1, -ab\rangle)$

Lösung zu ①:

$(\Longrightarrow)$ $b \in D(\langle 1, a\rangle)$

$\underset{\text{Darstellungskriterium}}{\Longrightarrow}$ $\langle 1, a\rangle \cong \langle b, c\rangle$ für ein $c \in \dot{F}$

Determinante zeigt:

$a = bcd^2$ für ein $d \in \dot{F}$

$\Longrightarrow$ $\langle 1, a\rangle \cong \langle b, ab^{-1}d^{-2}\rangle$

$\cong \langle b, ab^{-1}\rangle$

$\cong \langle b, ab\rangle$

$= b \cdot \langle 1, a\rangle$

$(\Longleftarrow)$ $b \in D(\underbrace{b \cdot \langle 1, a\rangle}_{\langle b, ab\rangle})$ $\square$

Lösung zu 2:

$$d \in D(\langle 1, a\rangle) \qquad\qquad d \in D(\langle 1, b\rangle)$$

$$\Updownarrow \text{ Erster Darstellungssatz} \qquad\qquad \Updownarrow \text{ Erster Darstellungssatz}$$

$$\langle 1, a, -d\rangle \text{ isotrop} \qquad\qquad \langle 1, b, -d\rangle \text{ isotrop}$$

$$\Updownarrow \text{ Erster Darstellungssatz} \qquad\qquad \Updownarrow \text{ Erster Darstellungssatz}$$

$$-a \in D(\langle 1, -d\rangle) \qquad\qquad -b \in D(\langle 1, -d\rangle)$$

$$\Updownarrow \text{ 1} \qquad\qquad \Updownarrow \text{ 1}$$

$$\underbrace{\langle 1, -d\rangle \cong (-a)\cdot\langle 1, -d\rangle \qquad\qquad \langle 1, -d\rangle \cong (-b)\cdot\langle 1, -d\rangle}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned}\langle 1, -d\rangle &\cong (-a)\cdot(-b)\cdot\langle 1, -d\rangle \\ &= ab\cdot\langle 1, -d\rangle\end{aligned}$$

$$\Updownarrow \text{ 1}$$

$$ab \in D(\langle 1, -d\rangle)$$

Erster Darstellungssatz

$$\Updownarrow \text{ Erster Darstellungssatz}$$

$$\langle 1, -d, -ab\rangle \text{ isotrop}$$

$$\Updownarrow \text{ Erster Darstellungssatz}$$

$$d \in D(\langle 1, -ab\rangle)$$

$\square$