Wo haben Sie quadratische Formen / symmetrische Bilinearformen bisher gesehen?

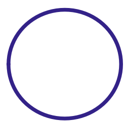
1 Lineare Algebra:
Quadriken / Hauptachsentransformation

Def: Sei $p = \sum_{i \le j} a_{ij} X_i X_j \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ Polynom vom Grad 2.

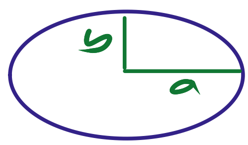
affine Quadrik

$$Q(p) := \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid p(\underline{x}) = 1 \}$$

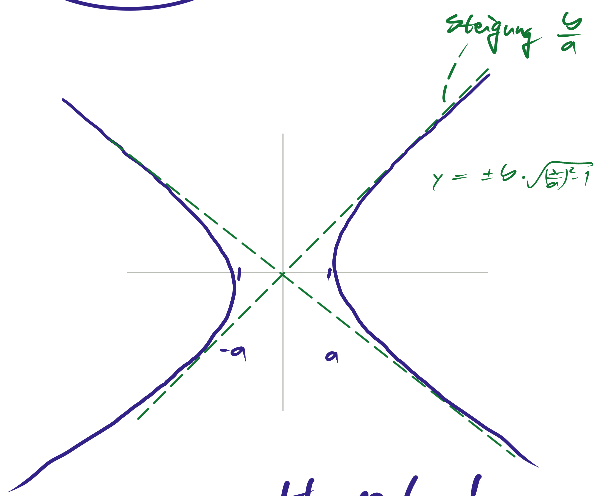
z.B. $Q(x_1^2 + x_2^2)$



$Q\left(\frac{1}{a^2} x_1^2 + \frac{1}{b^2} x_2^2\right)$



$Q\left(\frac{1}{a^2} x_1^2 - \frac{1}{b^2} x_2^2\right)$



Hyperbel

Satz (Hauptachsentransformation, geometrische Variante):

Bis auf Rotation & Spiegelung ist jede affine Quadrik von der Form $Q\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i^2\right)$.

Was hat das mit quadratischen Formen zu tun?

Satz (Hauptachsentransformation für quadratische Formen):

Sei V ein endlich-dim. eukl. VR,

$$q: V \longrightarrow \mathbb{R}$$

eine quadratische Form.

($z.B.$ $V = \mathbb{R}^n$, $q(\underline{x}) = \sum_{i \le j} a_{ij} x_i x_j$)

Es gibt eine ON-Basis $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ von V, in der q gegeben ist durch

$$q: V \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\sum x_i \underline{v}_i \longmapsto \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2$$

Satz (Hauptachsentransformation für symmetrische Matrizen):

Sei A symmetrische reelle $n{\times}n$-Matrix.

(also $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ mit $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$).

Es gibt eine Matrix $T \in O(n)$, für die gilt:

$$^tT \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

für gewisse $a_i \in \mathbb{R}$.

(Insbesondere ist A diagonalisierbar, denn für $T \in O(n)$ ist $^tT = T^{-1}$!)

Vortrag 2: quadratische Polynome
vs. Quadratformen
vs. symmetrische Matrizen
vs. symmetrische Bilinearformen

Vortrag 3: Für symmetrische Matrix A über beliebigem Körper F $\exists\, T \in GL_n(F)$ mit ^tTAT Diagonalmatrix

2 Trägheitssatz von Sylvester

Vorüberlegung:

Sei A symmetrische reelle $n \times n$-Matrix.
Es gibt eine reelle $n \times n$-Matrix T, für die gilt:

$$
{}^tT \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix}
+1 & & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & & \\
& & +1 & & & & & & \\
& & & -1 & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & \\
& & & & & -1 & & & \\
& & & & & & 0 & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & & 0
\end{pmatrix}
$$

$$
\underbrace{\qquad\qquad}_{n_+}\underbrace{\qquad\qquad}_{n_-}\underbrace{\qquad\qquad}_{n_0}
$$

Hierbei ist

$$
\left.\begin{array}{l}
n_+ = \text{Anzahl pos. EW von } A \\
n_- = \text{Anzahl neg. EW von } A
\end{array}\right\} \text{jeweils mit Vielfachheit}
$$

n_0 = Vielfachheit des EW 0

Beweis:

Laut Hauptsatz $\exists\, T \in O(n)$:

$$ {}^tT \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} a_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & a_k & & & & & & \\ & & & y_1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & y_l & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} $$

mit $a_i > 0$, $y_i < 0$.

Hier ist

k = Anzahl pos. EW von A

l = Anzahl neg. EW von A

$$ {}^tT \cdot A \cdot T \cdot \underline{e}_i = a_i \cdot \underline{e}_i $$

multipl. links mit T

$$ A \cdot (T \cdot \underline{e}_i) = a_i \cdot (T\underline{e}_i) $$

$\rightarrow T\cdot\underline{e}_1, \dots, T\underline{e}_k$ EV zu den EW $a_1, \dots, a_k$ von A

Analog:

$T\underline{e}_{k+1}, \dots, T\underline{e}_{k+l}$ EV zu den EW $y_1, \dots, y_k$ von A

Wähle

$$S := \begin{pmatrix} 1/\sqrt{|a_1|} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1/\sqrt{|a_k|} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Dann ist ${}^tS = S$, und

$$\underbrace{{}^tS\,{}^tT}_{{}^t(TS)} A T S = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{+1 \; \ddots \; +1}}^{k}\;\overbrace{\hphantom{-1 \; \ddots \; -1}}^{l}\;\hphantom{0 \; \ddots \; 0} \\ \begin{pmatrix} +1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & +1 & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & 0 & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$\square$

Trägheitssatz:

Sei A symmetrische reelle $n \times n$-Matrix.
Seien $n_+, n_-, n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $n = n_+ + n_- + n_0$.

Es gibt genau dann eine reelle $n \times n$-Matrix T, für die gilt

$$
{}^tT \cdot A \cdot T = \begin{array}{c}
\begin{pmatrix}
+1 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & +1 & & & & & & \\
 & & & -1 & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & -1 & & & \\
 & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & 0
\end{pmatrix} \\
\underbrace{\hphantom{+1 \quad \ddots \quad +1}}_{n_+}\underbrace{\hphantom{-1 \quad \ddots \quad -1}}_{n_-}\underbrace{\hphantom{0 \quad \ddots \quad 0}}_{n_0}
\end{array} ,
$$

wenn gilt:

$$
\left.\begin{array}{l}
n_+ = \text{Anzahl pos. EW von } A \\
n_- = \text{Anzahl neg. EW von } A
\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{jeweils} \\ \text{mit} \\ \text{Viel-} \\ \text{fachheit}\end{array}
$$

$n_0 =$ Vielfachheit des EW 0

Nach Vortrag 6:

"Trägheitssatz" lässt sich formulieren als: $\exists$ wohldefinierte Abb.

$$\begin{aligned} GW(\mathbb{R}) &\xrightarrow{\text{signatur}} \mathbb{Z} \\ A &\longmapsto n_+ - n_- \end{aligned}$$

symmetrische reelle Matrizen von vollem Rang

$\sim$

③ Analysis I: Extrema von Funktionen

$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ (glatt)

Def: Hessesche Matrix

$$H(f) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$$

$H(f)$ ist symmetrisch ✓

Satz: Sei f wie oben, $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ derart, dass $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\underline{x}) = 0$ $\forall i$.

① Sind alle EW von $H(f)(\underline{x})$ negativ, ist $\underline{x}$ ein lokales Maximum von f

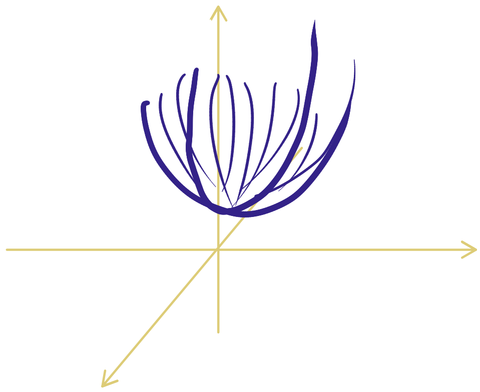
② Sind alle EW von $H(f)(\underline{x})$ positiv, ist $\underline{x}$ ein lokales Minimum von f.

Allgemeinen wird lokales Verhalten von f um $\underline{x}$ bestimmt durch die Invarianten n_+, n_-, n_0 von $H(f)(\underline{x})$.

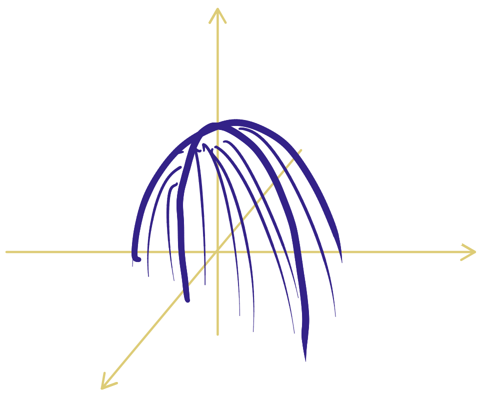
$n=2$:

(n_+, n_-, n_0)

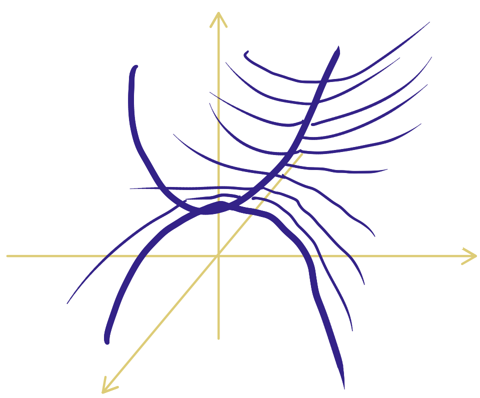
$(2, 0, 0)$: lokales Minimum



$(0, 2, 0)$: lokales Maximum



$(1, 1, 0)$: Sattelpunkt



$\left.\begin{array}{l}(1,0,1)\\(0,1,1)\\(0,0,2)\end{array}\right\}$ unklar