M1: Moduln

R Ring (assoziativ mit 1)

Hauptsächlich für uns interessant:

$\mathbb{Z}$ $\quad$ $\mathbb{Z}/_n$ $\quad$ $\underbrace{\mathbb{Z}/_p \text{ (p prim)} \quad \mathbb{Q} \quad \mathbb{R}}$ $\quad$ $\mathbb{Z}[G]$

endliche Gruppe

$\mathbb{Z}$-Moduln sind abelsche Gruppen

Moduln über Körpern sind Vektorräume

später i.A. nicht kommutativ

1. Def: Ein R-Rechtsmodul ist eine abelsche Gruppe $(M,+)$ zusammen mit einer „Skalarmultiplikation"

$$\begin{aligned} M \times R &\longrightarrow M \\ (m, a) &\longmapsto m \cdot a \end{aligned}$$

für die gilt:

$$\left.\begin{aligned} &\cdot\ m \cdot 1 = m \\ &\cdot\ m \cdot (ab) = (m \cdot a) \cdot b \\ &\cdot\ m \cdot (a+b) = m \cdot a + m \cdot b \\ &\quad (m+n) \cdot a = m \cdot a + n \cdot a \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\forall m, n \in M \\ &\forall a, b \in R \end{aligned}$$

Eine R-rechtslineare Abbildung / Morphismus von R-Rechtsmoduln zwischen zwei R-Rechtsmoduln M und N ist ein Gruppenhomomorphismus

$$f : (M,+) \longrightarrow (N,+),$$

für den zusätzlich gilt:

$$f(m \cdot a) = f(m) \cdot a \qquad \forall m \in M, a \in R$$

Mod_R : Kategorie der R-Rechtsmoduln

2. Beispiele

$R=\mathbb{Z}$ Jede abelsche Gruppe $(M,+)$ ist auf genau eine Weise ein $\mathbb{Z}$-Modul: Skalarmultiplikation ist gegeben durch

$$M \times \mathbb{Z} \longrightarrow M$$
$$(m, z) \longmapsto \begin{cases} \overbrace{m+\ldots+m}^{z \text{ Summanden}} & \text{falls } z>0 \\ 0 & \text{falls } z=0 \\ -(m+\ldots+m) & \text{falls } z<0 \end{cases}$$

Jeder Gruppenhomomorphismus zwischen ab. Gruppen ist $\mathbb{Z}$-linear. Also:

$$\mathrm{Mod}_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Ab}$$

R ein Körper – Dann ist

$$\mathrm{Mod}_R = \mathrm{Vec}_R .$$

$R=\mathbb{Z}/n$ Ein $\mathbb{Z}/n$-Modul ist dasselbe wie eine ab. Gruppe M, in der gilt:

$$\underbrace{m+\ldots+m}_{n \text{ Summanden}} = 0 \quad \forall m \in M$$

Zum Bsp. ist $\mathbb{Z}/20 \oplus \mathbb{Z}/5$ ein $\mathbb{Z}/20$-Modul.

- R selbst ist ein R-Rechtsmodul via Multiplikation.
- $0 := \{0\}$ ist ein R-Modul für jedes R.

3. Def. & Satz: M ein R-Rechtsmodul

(a) Ein (R Rechts-) Untermodul $M' \subseteq M$ ist eine Untergruppe, auf die sich die Skalarmultiplikation einschränken lässt.

$$(m' \cdot a \in M' \quad \forall m' \in M', a \in R)$$

(b) Ist $M' \subseteq M$ ein Untermodul, so ist die Quotientengruppe M/M' wieder ein R-Rechtsmodul bzgl.

$$M/M' \times R \longrightarrow M/M'$$
$$\bar{m} \cdot a \longmapsto \overline{m \cdot a}$$

M/M' heißt Quotientenmodul.

4. Beispiele

(a) Die R-Rechtsuntermoduln von R heißen Rechtsideale von R.

Unterbsp.: $\{\text{Ideale von } \mathbb{Z}\} = \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}\}$
$= \{ n \cdot \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}_0 \}$

$\{\text{Ideale von } \mathbb{Z}/n\} = \{\text{Untergruppen von } \mathbb{Z}/n\}$
$= \{ k \cdot \mathbb{Z}/n \mid k \text{ ist Teiler von } n \}$

Unterbsp.: k Körper

$\{\text{Ideale von } k\} = \{0, k\}$

Unterbsp.: $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in k \right\} \subseteq Mat_{2\times 2}(k)$

ist ein Rechtsideal

(b) Für jede R-rechtslineare Abb. $f: M \to N$ sind der Kern und das Bild Rechtsuntermoduln:

$$\ker(f) := \{ m \in M \mid f(m) = 0 \} \subseteq M$$
$$\operatorname{im}(f) := f(M) \subseteq N$$

Wir erhalten entsprechende Quotientenmoduln:

$$\operatorname{coker}(f) := N/\operatorname{im}(f)$$

(& $\operatorname{coim}(f) := M/\ker(f)$)

5. Def & Satz: M, N R-Rechtsmoduln

$\operatorname{Hom}_R(M,N)$ $(:= \operatorname{Hom}_{\mathrm{Mod}_R}(M,N))$ ist eine abelsche Gruppe via

$$(f+g)(m) := f(m) + g(m) \qquad \text{für } m \in M$$

Neutrales Element ist

$$0: M \longrightarrow N, \quad m \longmapsto 0$$

6 Notiz: Diese additive Struktur ist mit Komposition verträglich.

(a) $h \circ (f+g) = h \circ f + h \circ g$

(b) $(f+g) \circ h = f \circ h + g \circ h$

Daher erhalten wir auf Mod_R Funktoren

$$\boxed{\operatorname{Hom}_R(M,-): \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}}$$

$$\begin{array}{ccc} N & \longmapsto & \operatorname{Hom}_R(M,N) \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_*} \\ N' & \longmapsto & \operatorname{Hom}_R(M,N') \end{array} \qquad h_*(f) = h \circ f$$

$$\operatorname{Hom}_R(-,N): \mathrm{Mod}_R \longrightarrow \mathrm{Ab}^{op}$$

((a) sagt: h_* ist Gruppenhomomorphismus.
(b) sagt: h^* ist Gruppenhomomorphismus.)

7. Bemerkung: Für kommutatives R ist $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ sogar R-Modul, via

$$(f \cdot a)(m) := f(m \cdot a),$$

denn diese Abbildung ist dann R-linear.

8. Def.: Eine Sequenz von R-Modulhomomorphismen

$$L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N$$

ist **exakt**, wenn gilt: $\mathrm{im}(f) = \ker(g)$

Eine **kurze exakte Sequenz** ist eine Sequenz

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow 0,$$

die an jeder Stelle exakt ist.

9. Notiz:

(a) Für Morphismen $i: M \longrightarrow N$ in Mod_R sind äquivalent:

⓪ i injektiv

① i Mono

② $(i \circ f = 0 \implies f = 0)$

③ $\ker(i) = 0$

④ $0 \longrightarrow M \xrightarrow{i} N$ ist exakt.

(b) Für Morphismen $q: M \longrightarrow N$ in Mod_R sind äquivalent:

⓪ q surjektiv

① q Epi

② $(f \circ q = 0 \implies f = 0)$

③ $\mathrm{coker}(q) = 0$

④ $M \xrightarrow{q} N \longrightarrow 0$ ist exakt..

Beweis:

(a) ⓪ $\Leftrightarrow$ ①: wie in Ab

(Elemente $m \in M$ entsprechen 1:1 R-Modulmorphismen $\begin{array}{ccc} R & \longrightarrow & M \\ 1 & \longmapsto & m \end{array}$)

⓪ $\Leftrightarrow$ ③, ③ $\Leftrightarrow$ ④, ① $\Rightarrow$ ② klar

② $\Rightarrow$ ①: Ist $i \circ f = i \circ g$ in Mod_R, folgt

$i \circ f - i \circ g = 0$, also

$i \circ (f - g) = 0$.

Aus ② folgt nun $f - g = 0$, d.h. $f = g$.

(b) ähnlich $\square$

10. Satz: Fünfer-Lemma

Seien
$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\cong f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"', "\cong"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

zwei kurze exakte Sequenzen in Mod_R, und f, g, h Morphismen in Mod_R derart, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Sind f und h Isomorphismen, so ist auch g ein Isomorphismus.

Allgemeiner:

Seien
$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r] \arrow[d, two heads, "e"] & L \arrow[r] \arrow[d, "\cong f"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "h"', "\cong"] & P \arrow[d, tail, "j"] \\
K' \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r] & N' \arrow[r] & P
\end{tikzcd}$$

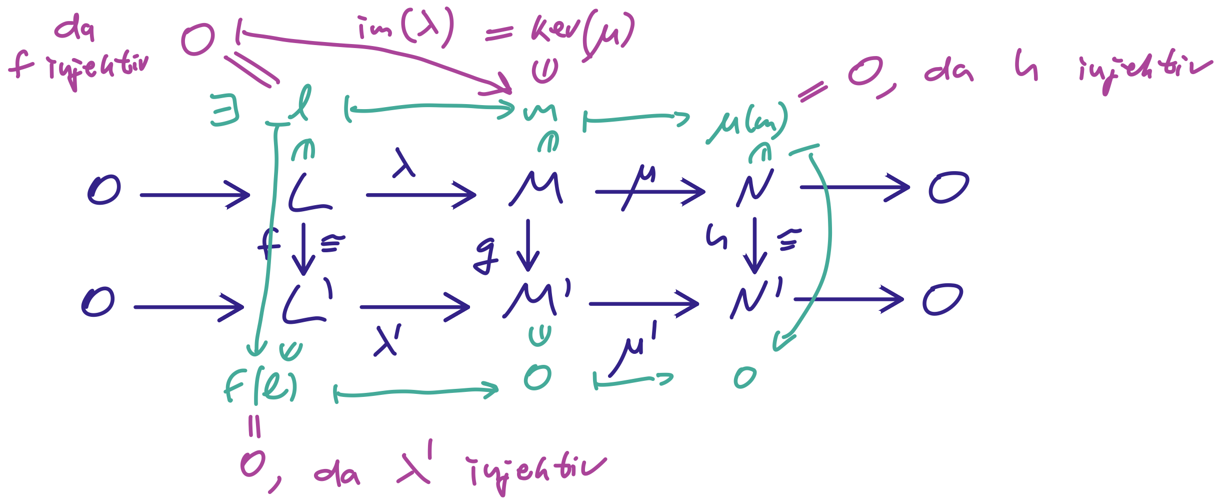
zwei exakte Sequenzen in Mod_R, und e, f, g, h, j Morphismen in Mod_R derart, dass das gesamte Diagramm kommutiert. Ist

e ein Epimorphismus und
f ein Isomorphismus und
h ein Isomorphismus und
j ein Monomorphismus,

so ist g ein Isomorphismus.

Beweis: ganz unkategoriell: Wir zeigen durch Diagrammjagd, dass g bijektiv ist.

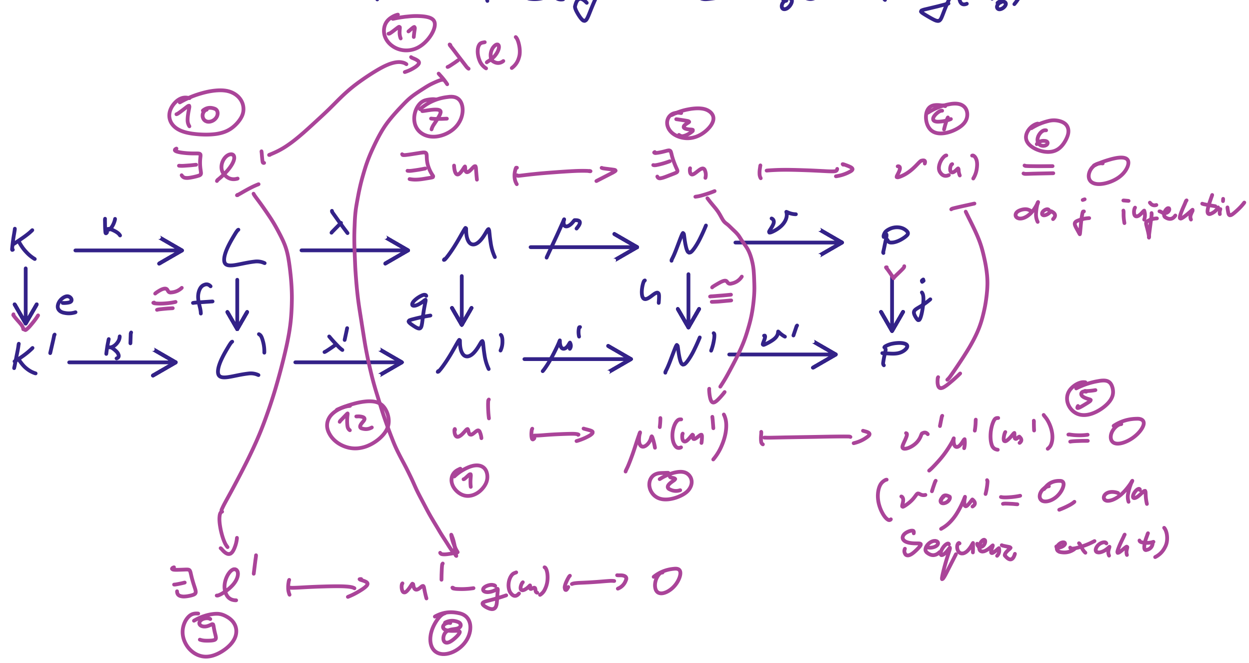
einfache Version; g injektiv:



Also $m = 0$.

allgemeine Version; g surjektiv:

Sei $m' \in M'$. Zu zeigen: $\exists\, m_0 \in M : g(m_0) = m'$



(12) $g(\lambda(\ell)) = m' - g(m)$, also $g(\underbrace{\lambda(\ell) + m}) = m'$.

Wähle also m_0.

$\square$

11. Satz: Universelle Eigenschaft des Quotienten

Sei $M' \subseteq M$ ein R-Rechtsuntermodul.
Für jeden Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R mit $f(M') = 0$ existiert genau eine Faktorisierung durch die Quotientenabb.
$q: M \to M/M'$.

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[rr, bend left, "0"] & \subseteq M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "q"'] & N \\
& M/M' \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\bar{F}"'] &
\end{tikzcd}$$

$f(m)$

$\exists!\,\bar{F}$ mit $\bar{F} \circ q = f$

$M/M' \ni [m]$

$\square$

12. Korollar (Isomorphiesatz)

Für jeden Morphismus $M \xrightarrow{f} N$ in Mod_R gibt es einen kanonischen Isomorphismus

$$M/\ker f \xrightarrow[\bar{F}]{\cong} \mathrm{im}(f)$$

Beweis:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] \arrow[d, "\cong"', "id"] & M \arrow[r, "q"] \arrow[d, "\cong"', "id"] & M/\ker f \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\bar{F}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & 0 \arrow[d, "\cong"] \\
0 \arrow[r] & \ker f \arrow[r] & M \arrow[r, "f"'] & \mathrm{im}(f) \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Aus 5er-Lemma folgt: $\bar{F}$ ist Isomorphismus.

$\square$