K4: Universelle Eigenschaften

$\mathcal{C}$ lokal kleine Kategorie, $A \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-)\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$F\colon \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets} \quad \text{weiterer Funktor}$$

1. Lemma: Jedes $a \in FA$ definiert eine natürliche Trafo

$$\alpha^a\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) \rightsquigarrow F$$

mittels

$$\alpha^a_B\colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \longrightarrow FB$$
$$f \longmapsto (Ff)(a)$$

Beweis:

Für $\begin{array}{c} B \\ g\downarrow \\ C \end{array}$ erhalten wir

$$\begin{tikzcd}
f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\alpha^a_B"] \arrow[d, "g_*"] & FB \arrow[d, "Fg"] & (Ff)(a) \arrow[d, mapsto] \\
g\circ f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[r, "\alpha^a_C"'] & FC & (Fg)(Ff)(a) = (F(g\circ f))(a)
\end{tikzcd}$$

$\square$

2. Notiz: Die Konstruktion lässt sich auch anwenden auf ein $F\colon \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Sets}$ und liefert dann Trafo

$$\alpha^a\colon \underbrace{\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(-,A)}_{= \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(A,-)} \rightsquigarrow F$$

3. Satz: Yoneda-Lemma

Für $\mathcal{C}$, A, F wie oben wie oben definiert

$$FA \longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{natürliche Trafos} \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$
$$a \longmapsto \alpha^a$$

eine Bijektion.

Beweis:

Definiere

$$FA \longleftarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{natürliche Trafos} \\ \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(A,-) \rightsquigarrow F \end{array} \right\}$$
$$\alpha_A(\mathrm{id}_A) \longmapsfrom \alpha$$

$(\circlearrowleft = \mathrm{id})$: $\quad \alpha^a_A(\underbrace{\mathrm{id}_A}_{f}) = (F(\mathrm{id}_A))(a) = \mathrm{id}_{FA}(a) = a$

$(G = \mathrm{id})$: Sei $a := \alpha_A(\mathrm{id}_A)$.

Zu zeigen: $\quad \alpha^a = \alpha$

Wähle dazu beliebiges $f: A \longrightarrow B$ in $\mathcal{C}$ und rechne nach:

$$\begin{aligned} \alpha^a_B(f) &= (Ff)(a) \\ &= (Ff)(\alpha_A(\mathrm{id}_A)) \\ &= \alpha_B(f_*(\mathrm{id}_A)) \\ &= \alpha_B(f) \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A,A) \arrow[r, "\alpha_A"] \arrow[d, "f_*"'] & FA \arrow[d, "Ff"] \\ \mathrm{Hom}(A,B) \arrow[r, "\alpha_B"'] & FB \end{tikzcd}$$

$\square$

4. Korollar: Yoneda-Einbettung „Prägarben auf $\mathcal{C}$"

Für jede lokal kleine Kategorie $\mathcal{C}$ haben wir **volltreue** Funktoren

(a) $\mathcal{Y}: \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, \mathrm{Sets})$

$\qquad X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X)$

(b) $\mathcal{Y}^*: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathrm{Sets})$

$\qquad X \longmapsto \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -): \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$

$$Z_1 \xrightarrow{h} Z_2 \qquad \mathrm{Hom}(X, Z_1) \xrightarrow{h_*} \mathrm{Hom}(X, Z_2)$$

Beweis:

(a) & (b) äquivalent

Zu b: Für jedes $Y \xleftarrow{f} X$ in $\mathcal{C}$ definiert f^* natürliche Trafo $\mathcal{Y}^*(Y) \xrightarrow{f^*} \mathcal{Y}^*(X)$:

Explizit: $\quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) \xrightarrow{(f^*)_Z} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z)$

$\qquad\qquad g \longmapsto g \circ f$

⌜Das ist natürlich:

für $Z_1 \xrightarrow{h} Z_2$ erhalten wir

$$\begin{tikzcd} g \in \mathrm{Hom}(Y, Z_1) \arrow[r, "(f^*)_{Z_1}"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{Hom}(X, Z_1) \ni g \circ f \arrow[d, "h_*"] \\ h \circ g \in \mathrm{Hom}(Y, Z_2) \arrow[r, "(f^*)_{Z_2}"'] & \mathrm{Hom}(X, Z_2) \ni h \circ g \circ f \end{tikzcd}$$

$$h \circ g \longmapsto h \circ g \circ f$$

⌟

Das definiert $\mathcal{Y}^*$ auf Morphismen.

Satz 3 liefert eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(Y,X) & & \mathrm{Hom}_{\mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op},\mathrm{Sets})}(\mathcal{Y}^*(Y),\mathcal{Y}^*(X)) \\
\| & & \| \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) & \xrightarrow{\cong} & \left\{\begin{array}{c}\text{natürliche Trafos} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,-) \rightsquigarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)\end{array}\right\} \\
f & \longmapsto & \alpha^f
\end{array}$$

Hier war α^f definiert als: $\alpha^f_Z : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z)$

$$g \longmapsto g_*(f) = g\circ f = f^*(g) = \mathcal{Y}^*(f)(g) \qquad \square$$

5. Anmerkung

Korollar 4 bedeutet insbesondere

(a) Ist $\mathcal{Y}X_1 \cong \mathcal{Y}X_2$, so ist bereits $X_1 \cong X_2$.
Wir können also ein Objekt X in $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,X)$ (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle $T\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ alle Morphismen $T\longrightarrow X$ festlegen.

(b) Ist $\mathcal{Y}^*X_1 \cong \mathcal{Y}^*X_2$, so ist bereits $X_1 \cong X_2$.
Wir können also ein Objekt X in $\mathcal{C}$ bis auf Isomorphie dadurch festlegen, dass wir $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-)$ (als Funktor) angeben, also auf natürliche Weise für alle $T\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ alle Morphismen $X\longrightarrow T$ festlegen.

6. Def.: Ein Funktor
$$F: \mathcal{C}^{op} \longrightarrow \text{Sets} \qquad \text{bzw.} \qquad F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$$
ist *darstellbar*, wenn er natürlich isomorph ist zu
$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \qquad \text{bzw.} \qquad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$$
für ein $A \in \text{ob}\,\mathcal{C}$. Eine *Darstellung* von F ist ein Paar (A, a) mit $A \in \text{ob}\,\mathcal{C}$ und $a \in FA$ derart, dass die natürliche Trafo
$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A) \overset{\alpha^a}{\rightsquigarrow} F \qquad \text{bzw.} \qquad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) \overset{\alpha^a}{\rightsquigarrow} F$$
ein Isomorphismus ist. Das Element a heißt dann *universelles Element* von F, und (A, a) hat *die durch F definierte Universelle Eigenschaft (UE)*.

Zwei Sichtweisen:

- Wir verstehen Funktoren $F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$ besser, wenn wir eine Darstellung für sie finden.
- Wir verstehen Objekte/Konstruktionen in $\mathcal{C}$ besser, wenn wir sie durch eine UE beschreiben können (vgl. Anmerkung 5).

7. Notiz – vgl. Anmerkung 5

Stellen (A, a) und (B, b) denselben Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \text{Sets}$ dar / haben (A, a) und (B, b) dieselbe UE, so existiert (genau) ein Isomorphismus $f: A \xrightarrow{\cong} B$ mit $(Ff)(a) = b$.

Beweis: Betrachte
$$\alpha^a_B: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\cong} FB \ni b$$
$$\alpha^b_A: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A) \xrightarrow{\cong} FA \ni a$$
$$\alpha^a_A: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \xrightarrow{\cong} FA$$

Da α_B^a Bijektion ist, $\exists!\ f$ mit $\alpha_B^a(f) = b$, also $(Ff)(a) = b$.
Da α_A^b Bijektion ist, $\exists!\ g$ mit $(Fg)(b) = a$.
Es ist

$$\alpha_A^a(g \circ f) = F(g \circ f)(a) = Fg(Ff(a)) = a$$

aber auch

$$\alpha_A^a(\mathrm{id}_A) = a.$$

Also ist $g \circ f = \mathrm{id}_A$.
Analog $f \circ g = \mathrm{id}_B$. $\square$

8. Beispiele

(a) Der vergessliche Funktor U: Groups $\longrightarrow$ Sets wird dargestellt durch $(\mathbb{Z}, 1)$, denn ein Gruppenhomomorphismus $f: \mathbb{Z} \longrightarrow G$ ist eindeutig festgelegt durch $f(1) \in G$.

$$\alpha_G^1: \mathrm{Hom}_{\mathrm{Groups}}(\mathbb{Z}, G) \xrightarrow{\cong} UG$$
$$f \longmapsto f(1)$$

Umgekehrt hat $(\mathbb{Z}, 1)$ die durch U definierte UE.

Ähnlich werden die folgenden vergesslichen Funktoren dargestellt:

Ab $\longrightarrow$ Sets durch $(\mathbb{Z}, 1)$
$\mathrm{Mod}_R \longrightarrow$ Sets durch $(R, 1)$
Rings $\longrightarrow$ Sets durch $(\mathbb{Z}[x], 1)$
Top $\longrightarrow$ Sets durch $(*, *)$