

# K3: Äquivalenzen & natürliche Trafos

1. Def.:  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  voll heißt:

$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx_1, Fx_2)$   
ist für alle  $x_i$  in  $\mathcal{C}$  surjektiv.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  tren heißt:

$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx_1, Fx_2)$   
ist für alle  $x_i$  in  $\mathcal{C}$  injektiv.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  volltren heißt: voll und tren, also

$F: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x_1, x_2) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Fx_1, Fx_2)$   
für alle  $x_i$  in  $\mathcal{C}$  bijektiv.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  wesentlich surjektiv heißt:

für jedes  $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$  existiert ein  
 $X \in \text{ob } \mathcal{C}$  mit  $FX \cong Y$ .

2. Def.:  $\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  ist Isomorphismus von Kategorien,  
falls  $F: \text{ob } \mathcal{C} \rightarrow \text{ob } \mathcal{D}$  bijektiv  
und  $F$  volltren.

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}$  ist Äquivalenz von Kategorien,  
falls  $F$  wesentlich surjektiv  
und volltren ist.

3. Notiz:  $F$  Iso  $\Leftrightarrow \exists \mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$  mit  $GF = \text{id}_{\mathcal{C}}$   
und  $FG = \text{id}_{\mathcal{D}}$ .

Falls  $F$  Äquivalenz,  $\exists$  auch Äquivalenz  
 $\mathcal{C} \xleftarrow{G} \mathcal{D}$  - Genauerer später.

## 4. Beispiele

(a)  $\mathcal{C}$  Kategorie. Betrachte auf  $\text{ob } \mathcal{C}$  Äquivalenzrelation  
$$X \sim X' \Leftrightarrow X \cong X' \text{ in } \mathcal{C}$$

Wähle einen Repräsentanten aus jeder Äquivalenzkl.

$\mathcal{C}_{sk} \quad \text{ob } \mathcal{C}_{sk}$ : alle diese Repräsentanten

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}_{sk}}(X, X') := \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X').$$

ist (ein) **Skelett** von  $\mathcal{C}$ .

Kanonischer Inklusionsfunktor  $I: \mathcal{C}_{sk} \rightarrow \mathcal{C}$  ist eine Äquivalenz.

Unterbsp:

$\mathcal{C} = \text{fSets}$ : endliche Mengen

$\mathcal{C}_{sk}$  hat Objekte  $\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots$

Unterbsp:

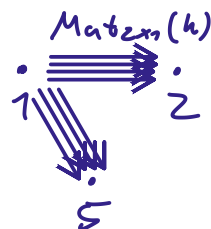
$\mathcal{D} = \text{fd Vec}_k$ : endlich-dim. VR /  $k$

$\mathcal{D}_{sk}$  hat Objekte  $k^n, n \in \mathbb{N}_0$ .

(b)  $\text{Mat}_k \quad \text{ob}(\text{Mat}_k) := \mathbb{N}_0$ .

$$\text{Hom}_{\text{Mat}_k}(n, m) := \text{Mat}_{m \times n}(k)$$

Komposition : Matrixmultiplikation



# Zusammenfassung der Linearen Algebra I:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mat}_k & \longrightarrow & \text{Fd Vec}_k \\
 \begin{array}{c} n \\ \text{Matrix } A \\ m \end{array} & \begin{array}{c} \longmapsto \\ \\ \longmapsto \end{array} & \begin{array}{c} k^n \\ \downarrow A \\ k^m \end{array}
 \end{array}$$

ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Der Funktor

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Mat}_k & \longrightarrow & \mathcal{D}_{sk} \\
 \begin{array}{c} n \\ \\ m \end{array} & \begin{array}{c} \longmapsto \\ \\ \longmapsto \end{array} & \begin{array}{c} k^n \\ \\ k^m \end{array}
 \end{array}$$

ist sogar ein Isomorphismus.

aus Beispiel (a)

(c)  $X$  topologischer Raum,  $x \in X$ . Der Inklusionsfunktion



$$\circlearrowleft \pi(x) = X$$

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_1(X, x) & \longrightarrow & \pi(X) \\
 * & \longmapsto & x
 \end{array}$$

ist volltreu  $\left( \text{Hom}_{\pi_1(X, x)}(*, *) = \pi_1(X, x) = \text{Hom}_{\pi(X)}(x, x) \right)$ .

Er ist genau dann wesentlich surjektiv, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist.

(d)  $\mathcal{C}$  eine Menge mit einer Äquivalenzrelation (aufgefasst als Kategorie)



$\mathcal{D}$  Quotientenmenge, aufgefasst als diskrete Kategorie



Die Quotientenabb. definiert eine Äquivalenz

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$$

$\emptyset, \{1\}, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \dots$

(e) Noch einmal  $\mathcal{C} = \text{fSets}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{sk}}$  wie in (a)

$$I: \mathcal{C}_{\text{sk}} \hookrightarrow \mathcal{C} \quad \text{Inklusion.}$$

Wähle zu jeder endlichen Menge  $X$  einen Iso.

$$\eta_X: I\{1, \dots, |X|\} \xrightarrow{\cong} X$$

Definiere

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_{\text{sk}} & \xleftarrow{G} & \mathcal{C} \\ \{1, \dots, |X|\} \leftarrow & & X \\ \downarrow \eta_Y^{-1} \circ f \circ \eta_X & & \downarrow f \\ \{1, \dots, |Y|\} \leftarrow & & Y \end{array}$$

Das ist ein Funktor, sogar Äquivalenz [...].

i. A.  $I \circ G(X) \neq X$ , nur  $I \circ G(X) \cong X$ .

Entsprechend i. A.  $I \circ G(f) \neq f$ , aber:

$$\begin{array}{ccc} \textcircled{I \circ G(X)} & \xrightarrow[\eta_X]{\cong} & \textcircled{X} \text{ Id} \\ \downarrow \eta_Y^{-1} \circ f \circ \eta_X = I \circ G(f) & & \downarrow f \\ \textcircled{I \circ G(Y)} & \xrightarrow[\eta_Y]{\cong} & \textcircled{Y} \text{ Id} \end{array} \quad \text{Kommutiert.}$$

//

Wollen wir Äquivalenz symmetrisch definieren, brauchen wir natürliche Trfos. Ähnlich wie es

top. Räume

stetige Abb.

Homotopien

gibt, gibt es:

Kategorien

Funktoren

natürliche Trfos

5. Def.: Seien  $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$  zwei Funktoren.

Eine natürliche Trafo  $\alpha: F \rightsquigarrow G$  besteht aus je einem Morphismus  $\alpha_x: FX \rightarrow GX$  in  $\mathcal{D}$ , für jedes Objekt  $X$  aus  $\mathcal{C}$ , derart, dass

$$\begin{array}{ccc} FX & \xrightarrow{\alpha_x} & GX \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ FY & \xrightarrow{\alpha_y} & GY \end{array}$$

Kommutiert für jedes  $f: X \rightarrow Y$  in  $\mathcal{C}$ .

Ein natürlicher Isomorphismus ist eine natürliche Trafo  $\alpha$ , deren sämtliche Komponenten  $\alpha_x$  Isos sind.

6. Notiz & Def: Wir erhalten so eine Kategorie

$\text{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$  mit Objekten: Funktoren  $\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$

Morphismen: natürliche Trafos

## 7. Beispiele

(a)  $\mathcal{R}: \text{Sets} \rightarrow \text{Sets} \quad - \text{K1, Bsp. 7 (g)}$   
 $X \mapsto \mathcal{R}(X)$

Id:  $\text{Sets} \rightarrow \text{Sets}$

$\alpha: \text{Id} \rightsquigarrow \mathcal{R}$

$\alpha_x: X \rightarrow \mathcal{R}(X)$   
 $x \mapsto \{x\}$

natürlich:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_x} & \mathcal{R}(X) \cong A \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{R}(f) \\ Y & \xrightarrow{\eta_y} & \mathcal{R}(Y) \cong f(A) \end{array}$$

$\{x\} \xrightarrow{\quad} \{f(x)\}$

(b)  $\text{Vec}_k \xrightarrow{\text{Id}} \text{Vec}_k$   
 $(\ )^{**}$   
 $\uparrow$  Dualfunktion ( $V^* = \text{Hom}_k(V, k)$ )

$\alpha: \text{Id} \rightsquigarrow (\ )^{**}$

$\alpha_V: V \longrightarrow V^{**}$

$v \mapsto (\varphi \mapsto \varphi(v))$

natürlich:

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\alpha_V} & V^{**} \\
 f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\
 W & \xrightarrow{\alpha_W} & W^{**} \\
 f(v) \mapsto & & 
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 (\varphi \mapsto \varphi(v)) \\
 \downarrow \\
 (\varphi \mapsto \varphi(v)) \circ f^* \\
 \parallel \\
 (\varphi \mapsto \varphi(f(w)))
 \end{array}$$

$(\varphi \mapsto \varphi(v)) \circ f^*: W^* \longrightarrow k$   
 $\varphi \mapsto f^*\varphi = \varphi \circ f \mapsto \varphi \circ f(w)$

(c)  $GL_n: \text{Fields} \longrightarrow \text{Groups}$

$k \mapsto GL_n(k)$   
 $\parallel$   
 $K \mapsto GL_n(K)$

$(\ )^x: \text{Fields} \longrightarrow \text{Groups}$

$k \mapsto k^x$   
 $\parallel$   
 $K \mapsto K^x$

$\det: GL_n \rightsquigarrow (\ )^x$  ist eine natürliche Trafo.

**8. Def.:** Zwei Kategorien  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  sind äquivalent, wenn es Funktoren  $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[F]{F} \mathcal{D}$  und natürliche Isomorphismen

$$\begin{aligned} \mu: \text{Id}_{\mathcal{C}} &\xrightarrow{\cong} G \circ F \\ \eta: F \circ G &\xrightarrow{\cong} \text{Id}_{\mathcal{D}} \end{aligned}$$

**9. Satz:** Diese Def. ist äquivalent zur Def. aus Def. 2.

**Beweis:**

( $\Leftarrow$ ) Sei  $F$  volltreu & wesentlich surjektiv.

Wähle für jedes Objekt  $Y$  aus  $\mathcal{D}$  ein Objekt  $G(Y)$  aus  $\mathcal{C}$  und einen Iso

$$\eta_Y: F G(Y) \xrightarrow{\cong} Y.$$

(Das ist möglich, da  $F$  wesentlich surjektiv.)

Das definiert  $G$  auf Objekten.

$$G\left(\begin{array}{c} Y_1 \\ \downarrow g \\ Y_2 \end{array}\right) := f, \text{ sodass } F(f) = \begin{array}{c} \eta_{Y_1}^{-1} \circ g \circ \eta_{Y_2} \\ \eta_{Y_2} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} F G(Y_1) & \xrightarrow{\cong} & Y_1 \\ \downarrow & & \downarrow g \\ F G(Y_2) & \xrightarrow{\cong} & Y_2 \end{array}$$

Das definiert  $G(g)$ , da  $F$  volltreu.

$G$  Funktor:

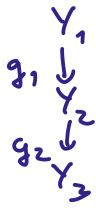
$$G(\text{id}_Y) = f, \text{ sodass } F(f) = \eta_Y^{-1} \circ \text{id}_Y \circ \eta_Y = \text{id}_{F G(Y)}$$

$$\text{Auch } F(\text{id}_{G(Y)}) = \text{id}_{F G(Y)}.$$

Da  $F$  treu, folgt  $f = \text{id}_{G(Y)}$ .

↑ injektiv auf Morphismenmengen

$$\begin{aligned}
 G(g_2 \circ g_1) &= f, \text{ sodass } F(f) = \eta_{Y_3}^{-1} \circ g_2 \circ g_1 \circ \eta_{Y_1} \\
 &= \underbrace{\eta_{Y_3}^{-1} \circ g_2 \circ \eta_{Y_2}}_{FG(g_2)} \circ \underbrace{\eta_{Y_2}^{-1} \circ g_1 \circ \eta_{Y_1}}_{FG(g_1)} \\
 &= F(G(g_2) \circ G(g_1))
 \end{aligned}$$



Wieder folgt, da  $F$  treu:

$$G(g_2 \circ g_1) = G(g_2) \circ G(g_1)$$

$\eta$  natürlichen Iso. ✓ (siehe Diagramm oben)

Konstruktion von  $\mu$ :

Betrachte  $FGF(X) \xrightarrow[\cong]{\eta_{FX}} F(X)$

Da  $F$  voll,  $\exists G(F(X)) \xleftarrow{\mu_X} X$  mit  $F(\mu_X) = \eta_{FX}^{-1}$

$\mu_X$  ist natürlich:

$$\begin{array}{ccc}
 GF(X_1) & \xleftarrow{\mu_{X_1}} & X_1 \\
 GF(f) \downarrow & & \downarrow f \\
 GF(X_2) & \xleftarrow{\mu_{X_2}} & X_2
 \end{array} \text{Kommutiert.}$$

da  $F$  treu

$$\begin{array}{ccc}
 FGF(X_1) & \xleftarrow{F\mu_{X_1}} & FX_1 \\
 FGF(f) \downarrow & & \downarrow Ff \\
 FGF(X_2) & \xleftarrow{F\mu_{X_2}} & FX_2
 \end{array} \text{Kommutiert.}$$

äquivalent:

$$\begin{array}{ccc}
 FGF(X_1) & \xleftarrow[\cong]{\eta_{FX_1}^{-1}} & FX_1 \\
 FGF(f) \downarrow & & \downarrow Ff \\
 FGF(X_2) & \xleftarrow[\cong]{\eta_{FX_2}^{-1}} & FX_2
 \end{array} \text{Kommutiert.}$$

Das Kommutiert, da  $\eta$  natürlich.



( $\Rightarrow$ ) Seien  $F, G, \mu, \eta$  gegeben.

$$\mu: \text{Id}_\mathcal{C} \xrightarrow{\cong} G \circ F$$

$$\eta: F \circ G \xrightarrow{\cong} \text{Id}_\mathcal{D}$$

$F$  wesentlich surjektiv: für  $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$

$$F(GY) \cong Y \quad (\text{via } \eta_Y)$$

$F$  treu: Sei  $F(f_1) = F(f_2)$ .

Dann ist auch  $GF(f_1) = GF(f_2)$ .

Betrachte  $\mu$ :

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow[\cong]{\mu_{X_1}} & GF(X_1) \\ f_i \downarrow & & \downarrow GF(f_i) \\ X_2 & \xrightarrow[\cong]{\mu_{X_2}} & GF(X_2) \end{array}$$

Offenbar  $f_i$  eindeutig festgelegt durch  $GF(f_i)$ . Also  $f_1 = f_2$ .

$F$  voll: Sei  $g: FX_1 \rightarrow FX_2$  Morphismus in  $\mathcal{D}$ .

surjektiv auf  
Morphismen-  
mengen

$$\begin{array}{ccc} FX_1 & & \\ \downarrow \mu_{X_1}^{-1} = F(\mu_{X_1}) & \searrow & \\ FGFX_1 & \xrightarrow[\cong]{\eta_{FX_1}} & FX_1 \\ \downarrow FG(g) & & \downarrow g \\ FGFX_2 & \xrightarrow[\cong]{\eta_{FX_2}} & FX_2 \\ \downarrow \mu_{X_2}^{-1} = F(\mu_{X_2}^{-1}) & \swarrow & \\ FX_2 & & \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{Also ist } g &= F(\mu_{X_2}^{-1}) \circ FG(g) \circ F(\mu_{X_1}) \\ &= F(\mu_{X_2}^{-1} \circ G(g) \circ \mu_{X_1}) \end{aligned}$$

□