K1: Kategorien & Funktoren

Eine Kategorie besteht aus Objekten & Morphismen.

1. Beispiele

(a) Sets: Objekte sind Mengen
Morphismen sind Abbildungen

(b) Groups: Objekte sind Gruppen
Morphismen sind Gruppenhomomorphismen

Ab : Objekte sind abelsche Gruppen
Morphismen sind Gruppenhomomorphismen

(c) Top: Objekte sind topologische Räume
Morphismen sind stetige Abbildungen

$Top_\bullet$: punktierte top. Räume (X, x)
Morphismen sind stetige Abbildungen, die den Basispunkt erhalten.

$$\mathrm{Hom}_{Top_\bullet}((X,x),(Y,y)) := \{ f \in \mathrm{Hom}_{Top}(X,Y) \mid f(x) = y \}$$

2. Def: Eine **Kategorie** $\mathcal{C}$ besteht aus

- einer Klasse von „Objekten" $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$
- einer Klasse von „Morphismen" $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ für je zwei Objekte X und Y
- einer Verknüpfung

  $$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z) &\to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f\ ,\ g) &\mapsto g\circ f \end{aligned}$$

  genannt „Komposition".

  $$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g\circ f"'] & Y \arrow[r, "g"] & Z \end{tikzcd}$$

- einer „Identität" $\mathrm{id}_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X)$ für jedes Objekt X

Dabei soll gelten:

(1) Komposition ist assoziativ:

$$h\circ(f\circ g) = (h\circ f)\circ g$$

(2) Identitäten sind neutral:

$$f\circ \mathrm{id}_X = \mathrm{id}_Y \circ f = f$$

für alle $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$.

Wir bezeichnen $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ bewusst nicht als Menge, da das zu Paradoxien führen würde.

Eine Kategorie ist **lokal klein**, wenn $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ jeweils eine Menge ist. Sie ist **klein**, wenn $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ eine Menge ist.

Beispiele (Fortsetzung):

(d) k Körper

Vec_k: Objekte sind Vektorräume $/k$
Morphismen sind k-lineare Abb.

fdVec_k — endlich-dim. Vektorräume $/k$

(e) HoTop **Homotopiekategorie**

$$\mathrm{ob}(\mathrm{HoTop}) = \mathrm{ob}(\mathrm{Top})$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HoTop}}(X,Y) := [X,Y]$$

$:=$ Homotopieklassen stetiger Abb. $X \to Y$

$$= \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(X,Y)/\simeq$$

wobei $f \simeq g \iff \exists\, H: [0,1] \times X \longrightarrow Y$, H stetig, $H_0 = f$, $H_1 = g$.

Die gewöhnliche Komposition in Top liefert wohldefinierte Komposition in HoTop

($f_0 \simeq f_1$ und $g_0 \simeq g_1$, dann auch $f_0 \circ g_0 \simeq f_1 \circ g_1$)

(f) $\mathcal{C}$ Kategorie, $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$

$X \downarrow \mathcal{C}$: $\quad \mathrm{ob}(X \downarrow \mathcal{C}) := \left\{ \text{Morphismen } \begin{matrix} X \\ \downarrow \\ Y \end{matrix} \text{ in } \mathcal{C} \right\}$

$$\mathrm{Hom}_{X \downarrow \mathcal{C}}\left(\begin{matrix} X \\ \downarrow f_1 \\ Y_1 \end{matrix}, \begin{matrix} X \\ \downarrow f_2 \\ Y_2 \end{matrix} \right)$$

$$:= \left\{ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y_1, Y_2) \;\middle|\; g \circ f_1 = f_2 \right\}$$

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f_1"'] \arrow[dr, "f_2"] & \\ Y_1 \arrow[rr, "g"'] & & Y_2 \end{tikzcd}$$

Unterbeispiel: $\mathrm{Top}_\bullet = * \downarrow \mathrm{Top}$

Einpunktraum

$\mathcal{C} \downarrow Y$: $\quad \mathrm{ob}(X \downarrow \mathcal{C}) := \left\{ \text{Morphismen } \begin{matrix} X \\ \downarrow \\ Y \end{matrix} \text{ in } \mathcal{C} \right\}$

$$\mathrm{Hom}_{X \downarrow \mathcal{C}}\left(\begin{matrix} X_1 \\ \downarrow f_1 \\ Y \end{matrix}, \begin{matrix} X_2 \\ \downarrow f_2 \\ Y \end{matrix} \right)$$

$$:= \left\{ g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) \;\middle|\; f_2 \circ g = f_1 \right\}$$

3. Def: Ein Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt **Isomorphismus**, falls es $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ gibt mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$.

Notation: $g = f^{-1}$

Beispiele:

In Sets, Groups, Ab, Vec_k ist ein Morphismus genau dann ein Isomorphismus, wenn er (als Abb. von Mengen) bijektiv ist.

In Top & $Top_\bullet$ sind die Isomorphismen die Homöomorphismen. ⚠ Nicht jede bijektive stetige Abb. ist ein Homöomorphismus.

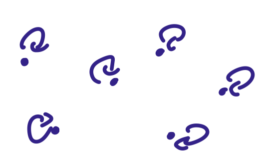
In HoTop sind die Isomorphismen die Homotopieäquivalenzen.

Beispiele für Kategorien (Forts.)

(g) Eine Menge S kann aufgefasst werden als kleine Kategorie mit den Elementen von S als Objekte, nur Identitäten als Morphismen.

$\mathrm{Hom}_S(x,x) = \{id_x\}$

$\mathrm{Hom}_S(x,y) = \emptyset$ für $x \neq y$



(h) quasigeordnete Menge := Menge mit refletiver, transitiver Relation

∃ Identitäten

∃ Kompositionen

kann aufgefasst werden als kleine Kategorie mit jeweils höchstens einem Morphismus von einem Objekt x zu einem Objekt y.

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[loop below] & \overset{y}{\bullet} \arrow[loop below] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[loop below] \arrow[r] & \overset{y}{\bullet} \arrow[loop below] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[loop left] \arrow[r, shift left] & \overset{y}{\bullet} \arrow[loop right] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

entspricht $x \leq y$

sind notwendig Isomorphismen

(i) halbgeordnete Mengen (engl.: partially ordered sets/posets)

:= Menge mit antisymmetrischer Quasiordnung

≙ quasigeordnete Menge, in der die einzigen Isos die Identitäten sind.

$$\begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[loop below] & \overset{y}{\bullet} \arrow[loop below] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[loop below] \arrow[r] & \overset{y}{\bullet} \arrow[loop below] \end{tikzcd} \qquad \cancel{\begin{tikzcd} \overset{x}{\bullet} \arrow[loop left] \arrow[r, shift left] & \overset{y}{\bullet} \arrow[loop right] \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}}$$

Unterbeispiele:

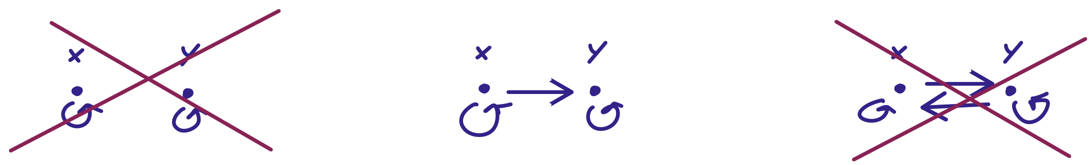
S Menge, $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$ halbgeordnete Menge

X top. Raum, $\mathcal{O}(X)$ offenen Mengen von X

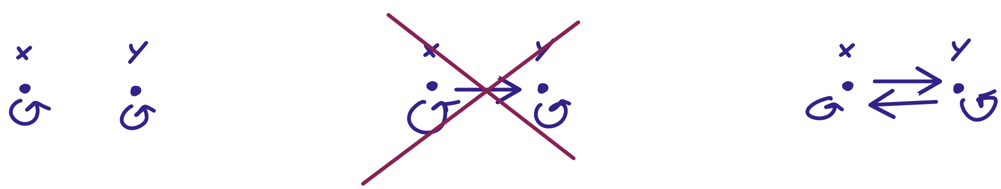
$(\mathcal{O}(X), \subseteq)$ halbgeordnete Menge

(j) total geordnete Menge

$\hat{=}$ kleine Kategorie mit genau einem Morphismus zwischen je zwei Objekten



(k) Äquivalenzrelation := Quasiordnung, in der alle Morphismen Isomorphismen sind



(l) Ein Monoid $(M,+)$ lässt sich auffassen als kleine Kategorie $\mathcal{M}$ mit genau einem Objekt.

$$\operatorname{ob}\mathcal{M} = \{*\}$$

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{M}}(*,*) = M$$

$$\text{Komposition} \;\hat{=}\; +$$

$$\mathrm{id}_* \;\hat{=}\; 0 \quad (\text{neutrales Element von } M)$$

$$\Big[\quad g^{-1} \;\hat{=}\; \text{inverses Element, falls es existiert} \Big]$$

$(\mathbb{N},+)$:

usw.

(m) Eine Gruppe ist ein Monoid, in dem alle Morphismen Isomorphismen sind.

(n) Ein Gruppoid ist eine lokal kleine Kategorie, in der alle Morphismen Isomorphismen sind.

Unterbeispiel: Das Fundamentalgruppoid $\pi(X)$ eines topologischen Raums X

$\operatorname{ob}\pi(X) := X$

$\operatorname{Hom}_{\pi(X)}(x,y) :=$ Homotopieklassen von Wegen von x nach y

Komposition := Hintereinanderausführen von Wegen

Insbesondere: $\operatorname{Hom}_{\pi(X)}(x,x) = \pi_1(X,x)$

4 Notation

Wir schreiben $f \in \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ oft $X \xrightarrow{f} Y$.

Ein Diagramm aus solchen Pfeilen heißt kommutativ, falls je zwei Kompositionen mit gleicher Quelle und gleichem Ziel übereinstimmen.

(z.B.: „
$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "h"'] & Z \end{tikzcd}$$
kommutativ" heißt $f \circ g = h \circ i$.)

5 Def.: Die zu einer Kategorie $\mathcal{C}$ duale (oder opponierte) Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ ist gegeben durch

$$\operatorname{ob} \mathcal{C}^{op} := \operatorname{ob} \mathcal{C}$$
$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X,Y) := \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

Beispiel: $\mathcal{C} \downarrow Y = (Y \downarrow \mathcal{C}^{op})^{op}$

6 Def.: $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ Kategorien.

Ein (kovarianter) Funktor $F: \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ besteht aus:

- einer Abb. $\operatorname{ob} \mathcal{C} \longrightarrow \operatorname{ob} \mathcal{D}$
- Abbildungen $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(FX,FY)$, derart, dass
$$F(f \circ g) = Ff \circ Fg$$
$$F(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{FX}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] & & \mathcal{D} \\
X \arrow[d, "f"'] & \longmapsto & FX \arrow[d, "Ff"] \\
Y & \longmapsto & FY
\end{tikzcd}$$

(Ein kontravarianter Funktor ist ein Funktor $\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}^{op}$)

Beispiele für Kategorien (Forts.)

(o) Cat $\quad$ ob Cat := kleine Kategorien

$\mathrm{Hom}_{Cat}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$:= Funktoren $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$

Beispiele für Funktoren

(a) Ein Funktor zwischen halbgeordnete Mengen entspricht einer ordnungserhaltenden Abb.

$(\; x \leq y \implies Fx \leq Fy \;)$

(b) Ein Funktor zwischen Monoiden / Gruppen ist ein Homomorphismus.

(c) „vergessliche" Funktoren

$$\mathrm{Ab} \longrightarrow \mathrm{Groups}$$

$$\mathrm{Groups} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$\mathrm{Top}_\bullet \longrightarrow \mathrm{Top}$$

$$\mathrm{Top} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

(d) „freie" Funktoren

$\mathrm{Sets} \longrightarrow \mathrm{Ab}$

$S \longmapsto$ freie abelsche Gruppe auf den Elementen von S $(\mathbb{Z}S)$

$\mathrm{Sets} \longrightarrow \mathrm{Groups}$

$S \longmapsto$ freie Gruppe auf den Elementen von S $(\mathbb{Z}^{*S}$ oder $\langle S \rangle)$

$$\left(\begin{array}{l} \mathbb{Z}^{\{a\}} = \mathbb{Z} = \langle a \rangle \\ \mathbb{Z}^{\{a,b\}} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \neq \underset{\substack{\rotatebox{90}{$\in$} \\ aba^{-1}b^{-1} \neq 1}}{\mathbb{Z} * \mathbb{Z}} = \langle a, b \rangle \end{array} \right)$$

(e) Dualisierungsfunktor auf Vec_k

$$\begin{tikzcd} Vec_k \arrow[r] & Vec_k^{op} \\ V \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & V^* := Hom_k(V, k) \\ W \arrow[r, mapsto] & W^* \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

(f) $\pi_1 : \quad Top_\circ \longrightarrow Groups$

$$\begin{tikzcd} (X, x) \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & \pi_1(X, x) \arrow[d, "\pi_1(f)"] \\ (Y, y) \arrow[r, mapsto] & \pi_1(Y, y) \end{tikzcd}$$

Analog: $\Pi : \quad Top \longrightarrow Groupoids$

(g) Potenzmenge $\mathcal{P} : \quad Sets \longrightarrow Sets$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & \mathcal{P}(S) \arrow[d] & U \subseteq S \arrow[d, maps to] \\ T \arrow[r, mapsto] & \mathcal{P}(T) & f(u) \subseteq T \end{tikzcd}$$

$\mathcal{P}^* : \quad Sets \longrightarrow Sets^{op}$

$$\begin{tikzcd} S \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & \mathcal{P}(S) & f^{-1}V \subseteq S \\ T \arrow[r, mapsto] & \mathcal{P}(T) \arrow[u] & V \subseteq T \arrow[u, maps to] \end{tikzcd}$$

(h) $\mathcal{C}$ lokal kleine Kategorie; X, Y Objekte

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,-) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[d, "f_*"] & \ni & g \arrow[d, mapsto] \\
B \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,B) & \ni & f \circ g
\end{tikzcd}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,Y) : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Sets}^{op}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y) & \ni & g \circ f \\
B \arrow[r, mapsto] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,Y) \arrow[u, "f^*"'] & \ni & g \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd}$$

(i) Eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf einem topologischen Raum X ist ein Funktor $(\mathcal{O}(X), \subseteq) \longrightarrow \mathrm{Sets}^{op}$

offene Mengen von X

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}(U) \\
V \arrow[u, phantom, "\cap" description] \arrow[r, mapsto] & \mathcal{F}(V) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

"Einschränkungsabb."

z. B. $\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Top}}(-, \mathbb{R})$