$(\{1\}, \cdot) \cong (\{0\}, +) \cong (\mathbb{Z}/\mathbb{Z}, +) \cong S_1$

$(\{\pm 1\}, \cdot) \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \cong S_2$

$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$

S_n

$(\mathbb{Z}, +)$

$(\mathbb{Q}, +) \quad (\mathbb{Q}^\times, \cdot)$

$(\mathbb{R}, +) \quad (\mathbb{R}^\times, \cdot)$

$(\mathbb{C}, +) \quad (\mathbb{C}^\times, \cdot)$

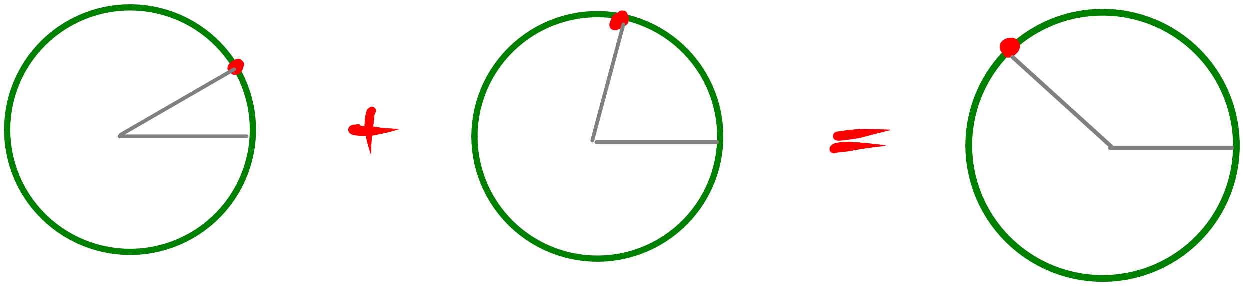
$GL_n(K) := (\{$ invertierbare $n \times n$-Matrizen über $K \}, \cdot)$

$GL(\mathbb{R}) \supset O(n) \supset SO(n)$

$GL(\mathbb{C}) \supset U(n) \supset SU(n)$

"geometrisch"

$U(1) \cong SO(2) \cong$ „Kreisgruppe"



$(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ euklidischer/unitärer VR

Def: Isometrie auf $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist eine lineare Abbildung

$$F: V \longrightarrow V,$$

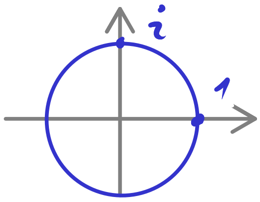
für die gilt:

$$\langle F(\underline{v}), F(\underline{w})\rangle = \langle \underline{v}, \underline{w}\rangle$$

$\forall \underline{v}, \underline{w} \in V$.

Satz: Alle Eigenwerte einer Isometrie haben Betrag 1.

$/\mathbb{R}$: $\quad \lambda = \pm 1$

/ $\mathbb{C}$ $\quad \lambda \in$ 

$\mathbb{C}$, $\quad \lambda = a + ib$ mit $a^2 + b^2 = 1$

Satz: Für $A \in M(n \times n; \mathbb{R} \mid \mathbb{C})$

sind äquivalent:

(i) F_A ist eine Isometrie

(ii) A ist invertierbar und $A^{-1} = {}^t\overline{A}$

(iii) Spalten von A bilden ON-Basis

(iv) Zeilen von A bilden ON-Basis.

Def: K Körper

$$GL_n(K) := M(n\times n; K)^*$$
$$= (\{A \in M(n\times n; K) \mid A \text{ invertierbar}\}, \cdot)$$
$$= (\{A \in M(n\times n; K) \mid \det A \neq 0\}, \cdot)$$

<u>allgemeine lineare Gruppe über K</u>

$$SL_n(K) := \{A \in GL_n(K) \mid \det A = 1\}$$

<u>spezielle lineare Gruppe</u>

$$O(n) := \{A \in M(n\times n; \mathbb{R}) \mid F_A \text{ Isometrie}\}$$
$$\underset{\text{Satz oben}}{=} \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^{-1} = {}^tA\}$$

$$SO(n) := O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

<u>(spezielle) orthogonale Gruppe</u>

$$U(n) := \{ A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid F_A \text{ Isom.} \}$$
$$= \{ A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^{-1} = {}^tA \}$$

$$SU(n) := U(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$$

(spezielle) unitäre Gruppe

Beispiel:

det $= 1$
Rotationen

$$O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$$
$$\dot\cup \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$$

det $= -1$
Spiegelung

$$SO(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a^2 + b^2 = 1 \right\}$$