Eine $\left|\begin{array}{l}\text{Bilinearform}\\ \text{Sesquilinearf.}\end{array}\right.$ auf einem $\left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\text{-VR}\\ \mathbb{C}\end{array}\right.$

V ist eine Abbildung

$$\underset{\underline{v},\underline{v}'}{V} \times \underset{\underline{w}}{V} \longrightarrow \left|\begin{array}{l}\mathbb{R}\\ \mathbb{C}\end{array}\right.,$$

für die gilt:

(i) $\beta(\underline{v}+\underline{v}', \underline{w}) = \beta(\underline{v}, \underline{w}) + \beta(\underline{v}', \underline{w})$

$\beta(\lambda \underline{v}, \underline{w}) = \lambda \beta(\underline{v}, \underline{w})$

(ii) $\beta(\underline{v}, \underline{w}+\underline{w}') = \beta(\underline{v}, \underline{w}) + \beta(\underline{v}, \underline{w}')$

$\beta(\underline{v}, \lambda \cdot \underline{w}) = \overline{\lambda} \beta(\underline{v}, \underline{w})$

Sie ist $\left|\begin{array}{l}\text{symmetrisch}\\ \text{hermitesch}\end{array}\right.$, wenn

ferner gilt: $\beta(\underline{w}, \underline{v}) = \overline{\beta(\underline{v}, \underline{w})}$

Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= {}^t\underline{x} \cdot E_n \cdot \underline{y}$$

(Matrix zu Standardskalarprodukt ist E_n.)

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$$

(gewöhnliche Länge)

Standardskalarprodukt auf $\mathbb{C}^n$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right\rangle := x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n}$$

$$= (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} \overline{y_1} \\ \vdots \\ \overline{y_n} \end{pmatrix}$$

$$= {}^t\underline{x} \cdot E_n \cdot \overline{\underline{y}}$$

(Matrix zu Standardskalarprodukt ist E_n.)

$$\left\| \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{x_1\overline{x_1} + \ldots + x_n\overline{x_n}}$$

$$= \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

(Vorlesung 8: $z\overline{z} = |z|^2$)

$$\|\underline{v}\| := \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

Beweis:

(i) klar, da $\langle \cdot , \cdot \rangle$ positiv definit

$$\left(\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle > 0 \text{ für } \underline{v} \neq \underline{0} \right)$$

$$\begin{aligned} \langle \underline{0}, \underline{0} \rangle &= \langle 0 \cdot \underline{0}, \underline{0} \rangle \\ &= 0 \cdot \langle \underline{0}, \underline{0} \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned} \|\lambda \underline{v}\| &= \sqrt{\langle \lambda \underline{v}, \lambda \underline{v} \rangle} \\ &= \sqrt{\underbrace{\lambda \bar{\lambda}} \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} \\ &= \sqrt{|\lambda|^2 \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} \\ &= |\lambda| \cdot \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle} \\ &= |\lambda| \cdot \|\underline{v}\| \end{aligned}$$

(iv) (vgl. [6.5.3])

Falls $\underline{w} = \underline{0}$: $\quad 0 \leq 0$ ✓

Falls $\underline{w} \neq \underline{0}$: Definiere

$$\lambda := \frac{\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle}{\|\underline{w}\|^2}$$

Dann ist

$$0 \le \|\underline{v} - \lambda\cdot\underline{w}\|^2 = \langle \underline{v} - \lambda\cdot\underline{w}, \underline{v} - \lambda\cdot\underline{w}\rangle$$

$$= \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle - \langle \lambda\cdot\underline{w}, \underline{v}\rangle - \langle \underline{v}, \lambda\cdot\underline{w}\rangle + \langle \lambda\underline{w}, \lambda\underline{w}\rangle$$

$$= \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle - \lambda\cdot\overline{\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle} - \bar{\lambda}\cdot\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle + \lambda\cdot\bar{\lambda}\cdot\langle \underline{w}, \underline{w}\rangle$$

λ

$$= \langle \underline{v}, \underline{v}\rangle - \frac{\langle v, w\rangle}{\|w\|^2}\cdot\overline{\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle} - \frac{\overline{\langle v, w\rangle}\cdot\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle}{\|w\|^2} + |\lambda|^2\cdot\langle \underline{w}, \underline{w}\rangle$$

$$= \|\underline{v}\|^2 - 2\cdot\frac{|\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle|^2}{\|\underline{w}\|^2} + |\lambda|^2\|\underline{w}\|^2$$

$$= \|\underline{v}\|^2 - 2\cdot\frac{|\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle|^2}{\|\underline{w}\|^2} + \frac{|\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle|^2}{\|\underline{w}\|^{\cancel{4}\,2}}\cdot\cancel{\|\underline{w}\|^2}$$

$$= \underline{\|\underline{v}\|^2 - \frac{|\langle \underline{v}, \underline{w}\rangle|^2}{\|\underline{w}\|^2}}$$

iii: $\|\underline{v}+\underline{w}\|^2 = \langle \underline{v}+\underline{w}, \underline{v}+\underline{w}\rangle$

$= \langle \underline{v},\underline{v}\rangle + \langle \underline{v},\underline{w}\rangle + \langle \underline{w},\underline{v}\rangle + \langle \underline{w},\underline{w}\rangle$

$= \|\underline{v}\|^2 + \underbrace{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle + \overline{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}}_{2\cdot \mathrm{Re}(\langle \underline{v},\underline{w}\rangle)} + \|\underline{w}\|^2$

$((a+ib)+(a-ib)=2a)$

$\leq 2|\langle \underline{v},\underline{w}\rangle|$

$\leq \|\underline{v}\|^2 + 2|\langle \underline{v},\underline{w}\rangle| + \|\underline{w}\|^2$

$\overset{(iv)}{\leq} \|\underline{v}\|^2 + 2\cdot\|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\| + \|\underline{w}\|^2$

$= (\|\underline{v}\|+\|\underline{w}\|)^2$

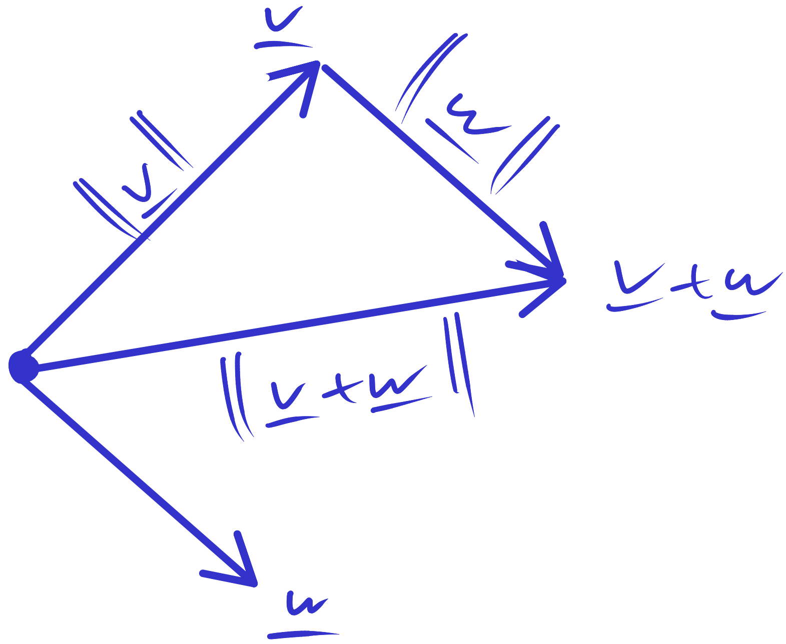
Da $\sqrt{\ }$ monoton, folgt iii. $\square$

Anschauung:

Für Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: $\|\underline{v}\| =$ Länge von $\underline{v}$ ✓

Abstand von $\underline{0}$

Dreiecksungleichung:



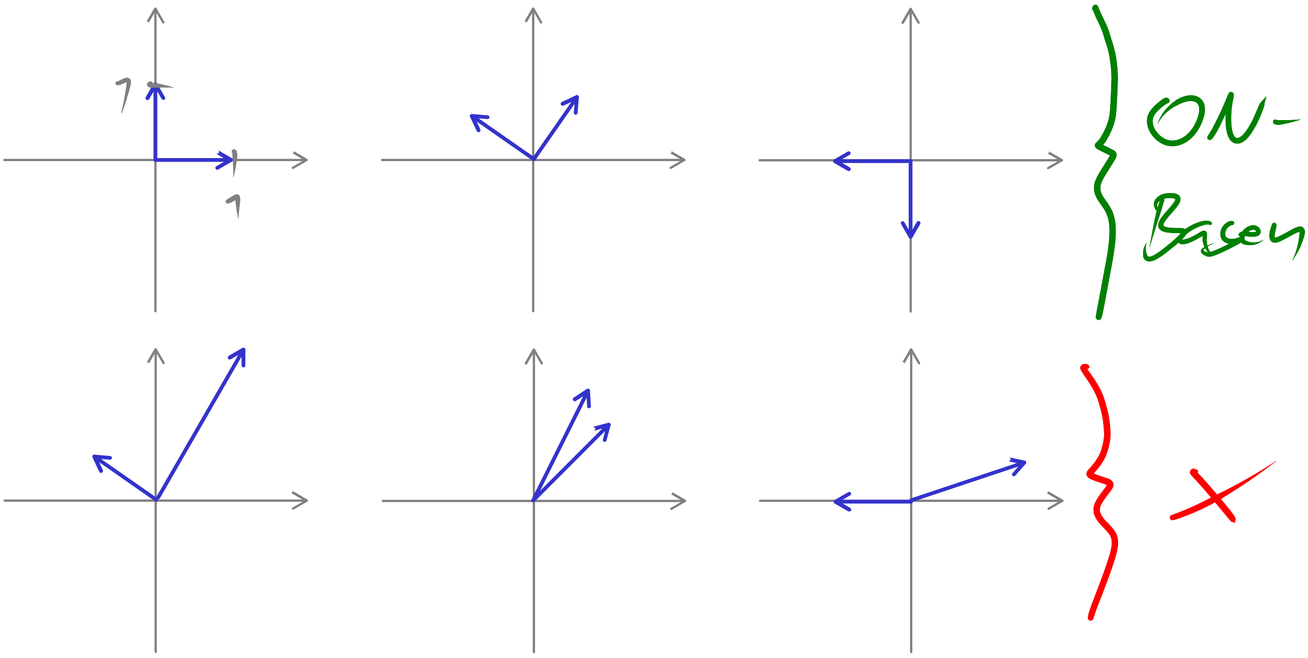
$$\measuredangle(\underline{v},\underline{w}) = \arccos\Bigg(\underbrace{\frac{\langle \underline{v},\underline{w}\rangle}{\|\underline{v}\|\cdot\|\underline{w}\|}}_{\in[-1,\,1] \text{ nach Cauchy-Schwarz}}\Bigg) \in [0,\pi]$$

Somit ist

$$\langle \underline{v},\underline{w}\rangle = \|v\|\,\|w\|\cdot\cos(\measuredangle(\underline{v},\underline{w}))$$

ein äquivalenter Ausdruck für Standardskalarprodukt in $\mathbb{R}^n$.

Bsp: ($\mathbb{R}^2$, Standardskalarprodukt)



Konstruktiver Beweis

Wende auf eine beliebige Basis $(\underline{b}_1, \ldots, \underline{b}_n)$ das <u>Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren an:</u>

Ersetze induktiv

$$\underline{b}_1 \text{ durch } \underline{d}_1$$
$$\underline{b}_2 \text{ durch } \underline{d}_2$$
$$\vdots$$

derart, dass jeweils

$$(\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_k, \underline{b}_{k+1}, \ldots, \underline{b}_n)$$

Basis von V ist und

$$\|\underline{d}_i\| = 1 \quad \forall i$$
$$\underline{d}_i \perp \underline{d}_j \quad \forall i \neq j.$$

IA/SCHRITT 1: $\underline{d}_1 := \frac{\underline{b}_1}{\|\underline{b}_1\|}$

IS/SCHRITT k:

Seien $\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_{k-1}$ bereits konstr.

Definiere

$$\underline{c}_k := \underline{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{b}_k, \underline{d}_i \rangle \underline{d}_i$$

$$\underline{d}_k := \frac{\underline{c}_k}{\|\underline{c}_k\|}$$

Prüfe:

- $\underline{c}_k \neq \underline{0}$ (denn $\underline{b}_k$ l.u. von $\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_{k-1}$),

  also $\underline{d}_k$ wohldefiniert.

- $\|\underline{d}_k\| = 1$ ✓

- $\langle \underline{d}_k, \underline{d}_j \rangle = 0$ für $j = 1, \ldots, k-1$:

  R.z.z.:

  $\langle \underline{c}_k, \underline{d}_j \rangle = 0$ für $j = 1, \ldots, k-1$:

$$\left\langle \underline{b}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{b}_k, \underline{d}_i \rangle \underline{d}_i, \underline{d}_j \right\rangle$$

$$= \langle \underline{b}_k, \underline{d}_j \rangle - \sum_{i=1}^{k-1} \langle \underline{b}_k, \underline{d}_i \rangle \underbrace{\langle \underline{d}_i, \underline{d}_j \rangle}_{=0 \text{ falls } i \neq j}$$

$$= \langle \underline{b}_k, \underline{d}_j \rangle - \langle \underline{b}_k, \underline{d}_j \rangle \cdot \underbrace{\langle \underline{d}_j, \underline{d}_j \rangle}_{1}$$

$$= 0. \checkmark$$

- $\underline{d}_1, \ldots, \underline{d}_{k-1}, \underline{d}_k, \underline{b}_{k+1}, \ldots, \underline{b}_n$ ist eine Basis ...

vgl. Aufgabe 11-3 $\square$