z.B.: $\mathrm{Eig}(F, 0) = \{\underline{v} \in V \mid F(\underline{v}) = \underline{0}\}$

$= \mathrm{Ker}(F)$

Bsp.: $\mathbb{R}^3 \xrightarrow[A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}]{F_A} \mathbb{R}^3$

$$\chi_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 1 & 0 \\ 1 & 2-t & 0 \\ 0 & 0 & 5-t \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$= (5-t)(t-1)(t-3)$$

χ_A hat Nullstellen 5, 1, 3

Laut Satz folgt:

F_A hat EW 5, 1, 3

<u>Beweis:</u> $\lambda \in K$

λ ist EW von F

$\Leftrightarrow \exists \underline{v} \neq \underline{0}: \quad F(\underline{v}) = \underbrace{\lambda \cdot \underline{v}}_{\lambda \cdot id(\underline{v})}$

$\Leftrightarrow \exists \underline{v} \neq \underline{0}: \quad (F - \lambda \cdot id)(\underline{v}) = \underline{0}$

$\Leftrightarrow \quad Ker(F - \lambda \cdot id) \neq \underline{0}$

$\Leftrightarrow \quad F - \lambda \cdot id$ ist kein Isomorphismus

(siehe Ende Vorlesung 14
F inj. $\Leftrightarrow$ F surj. $\Leftrightarrow$ F Iso.
für Endom. F endlich-dim. VR)

$\Leftrightarrow \quad M_B^B(F - \lambda \cdot id)$ nicht invertierbar

$\Leftrightarrow \det(M_B^B(F - \lambda \cdot id)) = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\det(F - \lambda \cdot id)}_{\chi_F(\lambda)} = 0$$

$\Leftrightarrow \lambda$ ist NS von χ_F $\square$

$$\mathbb{R}^3 \xrightarrow[A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}]{F_A} \mathbb{R}^3$$

$$\chi_A(t) = (5-t)(t-1)(t-3)$$

mit NS $5, 1, 3$.

$$F_A\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F_A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$F_A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11}-t & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-t \end{pmatrix}$$

$$= (a_{11}-t)\cdot(a_{22}-t) - a_{12}\cdot a_{21}$$

$$= (-1)^2 \cdot t^2 + a_{11}\cdot(-t) + a_{22}\cdot(-t) + \ldots$$

$$= t^2 - (a_{11}+a_{22})\cdot t + \underbrace{a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}}_{\det(A)}$$

//

$$(a_{11}-t)\cdot(a_{22}-t)\cdot(a_{33}-t)$$

//

<u>Beweis</u>: Ähnliche Matrizen haben dasselbe χ (Vorlesung 24). $\square$

Beweis: Wähle Basis

$b_1, \dots, b_m$ von $\mathrm{Eig}(F, \lambda)$ und

geometrische Vielfachheit

ergänze zu Basis

$\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_m, \dots, b_n)$ von V

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{array}{c} \overbrace{\hphantom{\lambda \quad \ddots \quad \lambda}}^{m} \qquad\qquad \\ \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & M' \end{array}\right) \end{array}$$

$$F(b_2) = 0 \cdot b_1 + \lambda \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 + \dots + 0 \cdot b_n$$

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - t \cdot E_n$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda - t & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda - t & \\ \hline & 0 & & M' - \lambda \cdot E_{n-m} \end{array}\right)$$

$$\chi_F \overset{(*)}{=} (\lambda - t)^m \cdot \det(M' - \lambda \cdot E_{n-m})$$

$$= (\lambda - t)^m \cdot \chi_{M'}(t)$$

Also algebr. Vielfachheit von λ $\geq m$ = geom. Vielf. von λ $\square$

(*: Laplace anwenden auf Spalte 1, Spalte 2, ..., Spalte m.

Allgemeiner gilt:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) = \det A \cdot \det C$$

)

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[A=\begin{pmatrix}2&1\\0&2\end{pmatrix}]{} \mathbb{R}^2$$

$$\chi_A = \det\begin{pmatrix}2-t & 1\\ 0 & 2-t\end{pmatrix} = (2-t)^2$$
$$= (t-2)^2$$

(algebraische Vielfachheit des EW 2) $= 2$

$$\mathrm{Eig}(F_A;2) = \mathrm{Lös}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$$A - 2\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

— 1-dimensional.

(geometrische Vielfachheit des EW 2) $= 1$

Beweis:

($\Downarrow$) Klar, wenn wir Basis $\mathcal{B}$ wählen, sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ Diagonalmatrix ist.

$$M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) = \begin{array}{c} \overbrace{\qquad\quad}^{r_1} \qquad\qquad\qquad \overbrace{\qquad\quad}^{r_l} \\ \left(\begin{array}{c|c|c} \begin{matrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_1\end{matrix} & 0 & 0 \\ \hline 0 & \ddots & 0 \\ \hline 0 & 0 & \begin{matrix}\lambda_l & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_l\end{matrix}\end{array}\right)\end{array}$$

$$\chi_F = (\lambda_1 - t)^{r_1} \cdot \ldots \cdot (\lambda_l - t)^{r_l}$$

($\Uparrow$) Nach Voraussetzung

$$\underbrace{\deg \chi_F}_{= \dim V} = \sum_{i=1}^{l} \underbrace{\mu(\chi_F; \lambda_i)}_{\overset{\text{n. V.}}{=} \dim \operatorname{Eig}(F; \lambda_i)}$$

Also ist geom. Diagonalisierbarkeitskr. (Vorl. 24) erfüllt $\square$

(Beweis des Korollars:
λ NS von χ_F, dann
λ EW von F, also
$\exists\, v \neq 0: \quad v \in \mathrm{Eig}(F;\lambda)$
also $1 \leq \dim(\mathrm{Eig}(F;\lambda)) \quad \square$)

Beispiel:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}]{} \mathbb{R}^2$$

$$\chi_A = \det\begin{pmatrix} 2-t & 1 \\ 0 & 3-t \end{pmatrix}$$

$$= (2-t)\cdot(3-t)$$

verschieden

Also ist F_A diagonalisierbar!