

Def: Eine Diagonalmatrix ist eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

Insgesondere

Vorlesung 21: Jede beliebige $n \times n$ -Matrix ist äquivalent quadratische

zu einer Matrix in Normalform.
Diagonalmatrix

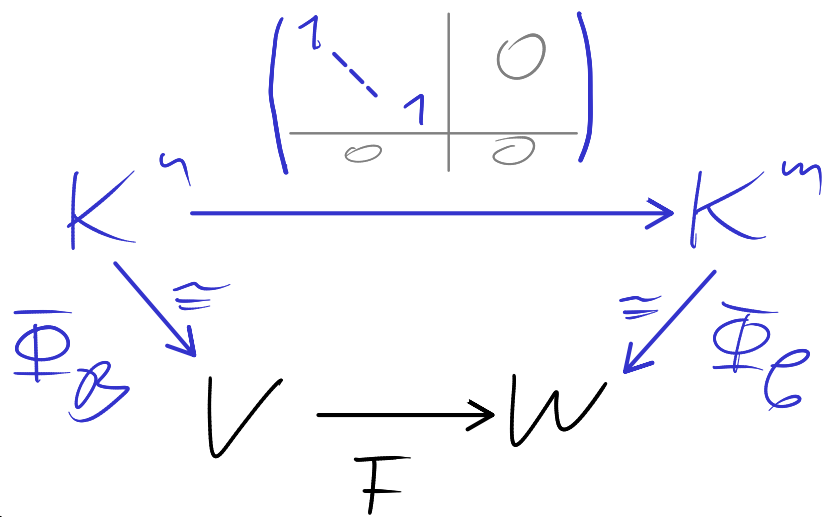
Jede lineare Abbildung

Jeder Endomorphismus

zwischen endl.-dim. VR

lässt sich also bezüglich geeigneter Basen darstellen

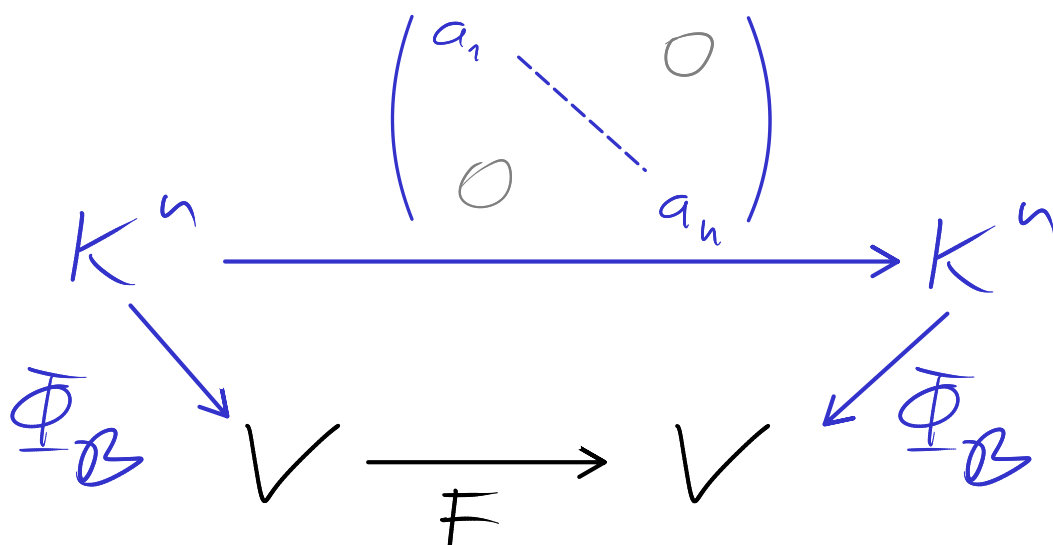
durch eine Matrix in Normalform.
Diagonalmatrix



Frage:

Welche quadratischen Matrizen sind sogar ähnlich zu Diagonalmatrizen?

Für welche Endomorphismen $F: V \rightarrow V$ existiert eine Basis \mathcal{B} von V , sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ Diagonalmatrix ist?



Def.: Ein Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ ist diagonalisierbar, falls es eine Basis \mathcal{B} von V gibt, sodass $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist.

Eine $n \times n$ -Matrix A ist diagonalisierbar, falls F_A diagonalisierbar ist (Äquivalent: ..., falls A ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix.)

Def.: [5.1.1] V VR, $F \in \text{End}_K(V)$.
 $\lambda \in K$ ist Eigenwert (EW) von F , falls es ein $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$, gibt, sodass
$$F(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$$

\underline{v} heißt dann Eigenvektor
(EV) zum EW λ .

Eigenraum von F zu λ
ist die Menge aller
EV zu λ zusammen mit $\underline{0}$:

$$\text{Eig}(F; \lambda) := \{ \underline{v} \in V \mid F(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v} \}$$

[5.1.4]

Notiz: Eigenräume sind UVR.

Notiz: Ein Vektor kann EV
[5.1.4] zu höchstens einem EW
sein:

$$\text{Eig}(F; \lambda) \cap \text{Eig}(F; \lambda') = \{ \underline{0} \}$$

für $\lambda \neq \lambda'$

Satz [5.1.3]: $F \in \text{End}_K(V)$.

EV $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ von F zu ver-
schiedenen

EW $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ sind linear un-
abhängig.

Geometrisches Diagonalisierbar-
keitskriterium (vgl. [5.3.3 iii])

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ die verschiedenen
EW von $F: V \rightarrow V$,
 V endlich-dim. Dann gilt:

$\Rightarrow F$ diagonalisierbar (1)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \text{Eig}(F; \lambda_i) = V$ (2)

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \dim \text{Eig}(F; \lambda_i) = \dim V$ (3)

Im Folgenden: V endlich-dim.
 $n := \dim V$ $F \in \text{End}_K(V)$.

Def: Die Determinante eines Endomorphismus $F: V \rightarrow V$ ist

$$\det(F) := \det(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F))$$

für eine beliebige Basis \mathcal{B} von V .

Diese Def. hängt nicht von der Wahl von \mathcal{B} ab:

Ist \mathcal{B}' weitere Basis, so sind $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F)$ und $M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}(F)$ ähnlich, und haben daher dieselbe Determinante.

Def: Das charakteristische Polynom von F ist

$$\chi_F := \det(F - t \cdot \text{id}) \in K[t]$$

Das ist so zu interpretieren,
dass wir eine Basis \mathcal{B} von V
wählen und Leibnizformel
anwenden auf

$$\left(M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F - t \cdot \text{id}) \right) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F) - \begin{pmatrix} t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t \end{pmatrix}$$

$\in M(n \times n; K[t])$

χ_F ist wiederum unabhängig
von der Wahl einer Basis.
Rechenregeln aus Vorlesung 23
(Multilinear, Alterniertheit,
Verhalten unter EZU/ESU,
Laplacescher Entwicklungssatz)
gelten allgemeiner für Matrizen
mit Koeff. in beliebigem
kommut. Ring, insbesondere für
 $K[t]$.