Def: Eine <u>Diagonalmatrix</u> ist eine quadratische Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}$$

Insbesondere

Vorlesung 21: Jede beliebige
m×n-Matrix ist <u>äquivalent</u>
quadratische
zu einer Matrix in Normalform.
Diagonalmatrix

Jede lineare Abbildung
Jeder Endomorphismus
zwischen endl.-dim. VR
lässt sich also bezüglich
geeigneter Basen darstellen
durch eine Matrix in Normalform.
Diagonalmatrix

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rr, "\left(\begin{array}{c|c} \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)"] \arrow[dr, "\cong"', "\Phi_{\mathcal{B}}"] & & K^m \arrow[dl, "\cong", "\Phi_{\mathcal{C}}"'] \\
V \arrow[r, "F"'] & W &
\end{tikzcd}
$$

Frage:

Welche quadratischen Matrizen sind sogar <u>ähnlich</u> zu Diagonalmatrizen?

Für welche Endomorphismen $F: V \longrightarrow V$ existiert eine Basis $\mathcal{B}$ von V sodass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ Diagonalmatrix ist?

$$
\begin{tikzcd}
K^n \arrow[rrr, "\begin{pmatrix} a_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathcal{B}}"'] & & & K^n \arrow[dl, "\Phi_{\mathcal{B}}"] \\
& V \arrow[r, "F"'] & V &
\end{tikzcd}
$$

Def: Ein Endomorphismus $F: V \longrightarrow V$ ist <u>diagonalisierbar</u>, falls es eine Basis $\mathcal{B}$ von V gibt, sodass $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ eine Diagonalmatrix ist.

Eine $n \times n$-Matrix A ist <u>diagonalisierbar</u>, falls F_A diagonalisierbar ist
(Äquivalent: ..., falls A ähnlich ist zu einer Diagonalmatrix.)

Def: [5.1.1] V VR, $F \in \mathrm{End}_K(V)$. $\lambda \in K$ ist <u>Eigenwert</u> (EW) von F, falls es ein $\underline{v} \in V$, $\underline{v} \neq \underline{0}$ gibt, sodass

$$F(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}$$

$\underline{v}$ heißt dann <u>Eigenvektor</u> (EV) zum EW λ.

<u>Eigenraum von F zu λ</u> ist die Menge aller EV zu λ zusammen mit $\underline{0}$:

$$\mathrm{Eig}(F;\lambda) := \{\underline{v} \in V \mid F(\underline{v}) = \lambda \cdot \underline{v}\}$$

[5.1.4]

Notiz: Eigenräume sind UVR.

Notiz: Ein Vektor kann EV zu höchstens einem EW sein:
[5.1.4]

$$\mathrm{Eig}(F;\lambda) \cap \mathrm{Eig}(F;\lambda') = \{\underline{0}\}$$

für $\lambda \neq \lambda'$

Satz [5.1.3]: $F \in End_K(V)$. EV $v_1, \dots, v_\ell$ von F zu <u>verschiedenen</u> EW $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ sind linear unabhängig.

Geometrisches Diagonalisierbarkeitskriterium (vgl. [5.3.3 iii])

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ die verschiedenen EW von $F: V \longrightarrow V$, V endlich-dim. Dann gilt:

$$F \text{ diagonalisierbar} \quad (1)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} Eig(F; \lambda_i) = V \quad (2)$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \dim Eig(F; \lambda_i) = \dim V \quad (3)$$

Im Folgenden: V endlich-dim.
$\boxed{n := \dim V}$ $F \in \mathrm{End}_K(V)$.

Def: Die <u>Determinante</u> eines Endomorphismus $F: V \to V$ ist

$$\det(F) := \det\left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)\right)$$

für eine beliebige Basis $\mathcal{B}$ von V.

Diese Def. hängt <u>nicht</u> von der Wahl von $\mathcal{B}$ ab: ist $\mathcal{B}'$ weitere Basis, so sind $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F)$ und $M^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}(F)$ ähnlich, und haben daher dieselbe Determinante.

Def: Das <u>charakteristische Polynom</u> von F ist

$$\chi_F := \det(F - t \cdot \mathrm{id}) \in K[t]$$

Das ist so zu interpretieren, dass wir eine Basis $\mathcal{B}$ von V wählen und Leibnizformel anwenden auf

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F - t\cdot \mathrm{id}) = M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}}(F) - \begin{pmatrix} t & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t \end{pmatrix} \in M(n \times n; K[t])$$

χ_F ist wiederum unabhängig von der Wahl einer Basis.

Rechenregeln aus Vorlesung 23 (Multilinear, Alterniertheit, Verhalten unter EZU/ESU, Laplaceschen Entwicklungssatz) gelten allgemeiner für Matrizen mit Koeff. in beliebigem komm. Ring, insbesondere für $K[t]$.