Beweis, Teil 1: det erfüllt (D1) – (D3)

(D3) $\det \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$

$\det \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \ldots \cdot 1 = 1$ ✓

(D1) $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ Zeilenvektoren

$\underline{a}_i = (a_{i1} \ \ldots \ a_{in})$

$$\det \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \vdots \\ \underline{a}_j + \underline{a}_j' \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{j-1,\sigma(j-1)} \cdot (a_{j\sigma(j)} + a'_{j\sigma(j)}) \cdot a_{j+1,\sigma(j+1)} \ldots a_{n\sigma(n)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{j\sigma(j)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$+\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a'_{j\sigma(j)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)}$$

$$=\det\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a'_j \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ \lambda\, a_j \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}=\ldots=\lambda\cdot\det\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_j \\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix} \quad \checkmark$$

(D2) alternierend:

Sei $a_j = a_k \quad (j \neq k)$.

$$\det\begin{pmatrix} a_1\\ \vdots \\ a_n\end{pmatrix}=\sum_{\sigma\in S_+} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot \Pi(\sigma) + \sum_{\sigma\in S_-} \operatorname{sign}(\sigma)\cdot \Pi(\sigma)$$

mit $\Pi(\sigma) := \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$

$$S_+ := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) > \sigma(k)\}$$

$$S_- := \{\sigma \in S_n \mid \sigma(j) < \sigma(k)\}$$

Wir haben Bijektion:

$$\begin{aligned} S_+ &\xrightarrow{\cong} S_- \\ \sigma &\longmapsto \sigma' := (\sigma(j)\ \sigma(k)) \circ \sigma \\ (\sigma'(j)\ \sigma'(k)) \circ \sigma' &\longleftarrow\!\shortmid\ \sigma' \end{aligned}$$

$$\operatorname{sign}(\sigma') = \underbrace{\operatorname{sign}((\sigma(j)\ \sigma(k)))}_{-1} \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$$

$$= -\operatorname{sign}(\sigma)$$

$$\Pi(\sigma') = \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma'(i)}$$

$$= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{n} a_{i\sigma'(i)}\right) \cdot a_{j\sigma'(j)}\, a_{k\sigma'(k)}$$

$$= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{n} a_{i\sigma(i)}\right) a_{j\sigma(k)}\, a_{k\sigma(j)}$$

$a_j = a_k$

$$= \left(\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j,k}}^{n} a_{i\sigma(i)}\right) a_{k\sigma(k)}\, a_{j\sigma(j)}$$

$$= \prod(\sigma)$$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_+} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod(\sigma) + \sum_{\sigma \in S_+} \underbrace{\operatorname{sign}(\sigma')}_{-\operatorname{sign}(\sigma)} \cdot \underbrace{\prod(\sigma')}_{\prod(\sigma)}$$

$$= 0. \qquad \square$$

Beweis, Teil II: det ist einzigartig!

Sei $f: M(n \times n; K) \longrightarrow K$ eine Abb., die (D1)–(D3) erfüllt.

$$e_j = (0 \ldots 0 \underset{j}{1} 0 \ldots 0)$$

$$f\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} \sum_j a_{1j_1} e_{j_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \overset{=}{\scriptstyle D1} \sum_{j_1} a_{1j_1} f\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

$$= \dots \overset{D1}{=} \sum_{\substack{j_1,\dots,j_n \\ \text{(jeweils von } 1 \text{ bis } n)}} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} f\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{\substack{j_1,\dots,j_n \\ \text{alle } j_i \text{ verschieden} \\ j_i \in \{1,\dots,n\}}} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} f\begin{pmatrix} e_{j_1} \\ \vdots \\ e_{j_n} \end{pmatrix}$$

$$= \qquad a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \underbrace{f\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ e_{\sigma(n)} \end{pmatrix}}$$

Notiz zu D2

$$= \sum_{\sigma \in S_n} a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} \cdot \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \underbrace{f\begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}}_{\substack{1 \\ (D3)}}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \qquad \square$$

Beweis:

$$\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\underbrace{\sigma(i)}_{j}\, i}$$

$$\operatorname{sign}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sign}(\sigma)^{-1} = \operatorname{sign}(\sigma)$$

Gruppen-homo.

$$a_{\sigma(i), i} = a_{\sigma(i), \sigma^{-1}(\sigma(i))} = a_{j, \sigma^{-1}(j)}$$

$$= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma^{-1}) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j\, \sigma^{-1}(j)}$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^{n} a_{j\, \sigma(j)}$$

$$= \det(A) \qquad \square$$

$$\det(\ldots, \overset{j}{\underline{a}_j}, \ldots, \overset{k}{\underline{a}_k + \lambda \underline{a}_j}, \ldots)$$

$$\underset{D1}{=} \det(\ldots, \overset{j}{\underline{a}_j}, \ldots, \underline{a}_k, \ldots)$$

$$+ \lambda \underbrace{\cancel{\det(\ldots, \underline{a}_j, \ldots, \underline{a}_j, \ldots)}}_{0 \text{ wegen } D2}.$$

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 7 \\ 3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} \quad (-3) \quad (-3)$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \quad (+1)$$

$$= -\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$= +\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -6$$

Beweis:

Sei $B = (b_{ij})$, $A = (a_{ij}) = (\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$

$$\underline{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$$

Dann ist

$$A \cdot B = \left(\sum_j a_{ij} b_{jk}\right)_{i,k}$$

$$= \left(\underbrace{\sum_j \underline{a}_j b_{j1}}_{k=1}, \dots, \sum_j \underline{a}_j b_{jn}\right)$$

$$\det(A \cdot B)$$

$$= \det\left(\sum_j \underline{a}_j b_{j1}, \dots, \sum_j \underline{a}_j b_{jn}\right)$$

$$\underset{(D1)}{=} \sum_{j_1, \dots, j_n} b_{j_1 1} \cdot \ldots \cdot b_{j_n n} \det(\underline{a}_{j_1}, \dots, \underline{a}_{j_n})$$

$$\underset{(D2)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1) 1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(n) n} \det(\underline{a}_{\sigma(1)}, \dots, \underline{a}_{\sigma(n)})$$

$$\underset{(D2)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1) 1} \cdot \ldots \cdot b_{\sigma(n) n} \operatorname{sign}(\sigma) \det(\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n)$$

$$\underbrace{\det({}^tB)}\quad\underbrace{\det(A)}$$

$$\underset{\text{s.o.}}{=} \det(B) \cdot \det(A)$$

$\square$

Beweis Korollar:

$$\det(T^{-1}AT) = \underbrace{\cancel{\det(T)^{-1}} \cdot \det(A) \cdot \cancel{\det(T)}}_{\text{in } K}$$
$$= \det(A)$$

[B ähnlich zu A

$:\Leftrightarrow \exists T$ inv. mit

$B = T^{-1}AT$]

Beweis Invertierbarkeits-Kriterium:

Falls A invertierbar $\exists B$:

$$A \cdot B = E_n.$$

Also $\underbrace{\det(A \cdot B)}_{\text{M-Satz}} = \underbrace{\det(E_n)}$

$$\det(A) \cdot \det(B) = 1$$

Also $\det(A) \neq 0$ und
$\det(B) = \det(A)^{-1}$.

Falls A nicht invertierbar,
$\exists \underbrace{S, T}_{\text{invert.}}$ mit

$$S^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}^{r} & 0 \\ 0 & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$r = \text{Rang}(A) < n$ (da A nicht invertierbar)

Daher

$$\underbrace{\det(S^{-1} \cdot A \cdot T)}_{\text{M-Satz}} = 0 \quad \text{in } K.$$

$$\underbrace{\det(S^{-1})}_{\neq 0} \cdot \det(A) \cdot \underbrace{\det(T)}_{\neq 0}$$

da S, T invert.

Also folgt:
$\det(A) = 0$. $\square$

Beispiel:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(i)}{=} 1\cdot\det\begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} - 0\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 8\det\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \ldots$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(ii)}{=} \cancel{-0\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}} + 7\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cancel{- 0\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$= 7\cdot 6 = \underline{\underline{42}}$$

Vorzeichen $(-1)^{k+l}$ ergibt Schachbrett-muster:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \\ + & - & + & - & + & - \\ - & + & - & + & - & + \end{pmatrix}$$

Beweis:

$$\det \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \det(B)$$

(folgt aus Leibnizformel)

Jetzt rechnen ...