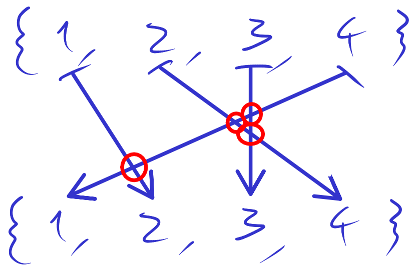
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} =$ 

4 Kreuzungspunkte
$\widehat{=}$ 4 Fehlstände

Beweis:

$F(\sigma) :=$ Anzahl der Fehlstände von σ

Abb. $F: S_n \longrightarrow \mathbb{Z}$

$\{i,k\}$	$\{\sigma(i),\sigma(k)\}$	$\{i,k\}$
Fehlstand von σ	Fehlstand von τ	Fehlstand von $\tau\circ\sigma$
Beitrag zu $F(\sigma)$	Beitrag zu $F(\tau)$	Beitrag zu $F(\tau\circ\sigma)$

Nein 0 + Nein 0 = Nein 0

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d] & k \arrow[d] \\ \sigma(i) \arrow[d] & \sigma(k) \arrow[d] \\ \tau\sigma(i) & \tau\sigma(k) \end{tikzcd}$$

Ja 1 + Nein 0 = Ja 1

$$\begin{tikzcd} i \arrow[dr] & k \arrow[dl] \\ \sigma(k) \arrow[d] & \sigma(i) \arrow[d] \\ \tau\sigma(k) & \tau\sigma(i) \end{tikzcd}$$

Nein 0 + Ja 1 = Ja 1

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d] & k \arrow[d] \\ \sigma(i) \arrow[dr] & \sigma(k) \arrow[dl] \\ \tau\sigma(k) & \tau\sigma(i) \end{tikzcd}$$

Ja 1 + Ja 1 Nein $\neq 0$

$$\begin{tikzcd} i \arrow[d] & k \arrow[d] \\ \tau\sigma(i) & \tau\sigma(k) \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} i \arrow[dr] & k \arrow[dl] \\ \sigma(k) \arrow[dr] & \sigma(i) \arrow[dl] \\ \tau\sigma(i) & \tau\sigma(k) \end{tikzcd}$$

Also $F(\sigma) + F(\tau) \neq F(\tau\circ\sigma)$

$F(\sigma) + F(\tau) - F(\tau\circ\sigma) \in 2\mathbb{Z}$

Daher

$$(-1)^{F(\sigma)+F(\tau)-F(\tau\circ\sigma)} = 1,$$

d.h. $\underbrace{(-1)^{F(\sigma)}}_{\mathrm{sign}(\sigma)} \cdot \underbrace{(-1)^{F(\tau)}}_{\mathrm{sign}(\tau)} = \underbrace{(-1)^{F(\tau\circ\sigma)}}_{\mathrm{sign}(\tau\circ\sigma)}$

(Vornehm ausgedrückt:

$$[F(\sigma)] + [F(\tau)] = [F(\tau\circ\sigma)] \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

$$\overbrace{S_4 \longrightarrow (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +)}^{\text{Homomorphismus}} \xrightarrow{\cong} (\{\pm 1\}, \cdot)$$

$$\sigma \longmapsto [F(\sigma)] \quad [n] \longmapsto (-1)^n$$

$$\underbrace{\sigma \longmapsto (-1)^n}_{\mathrm{sign}}$$

)

$\square$

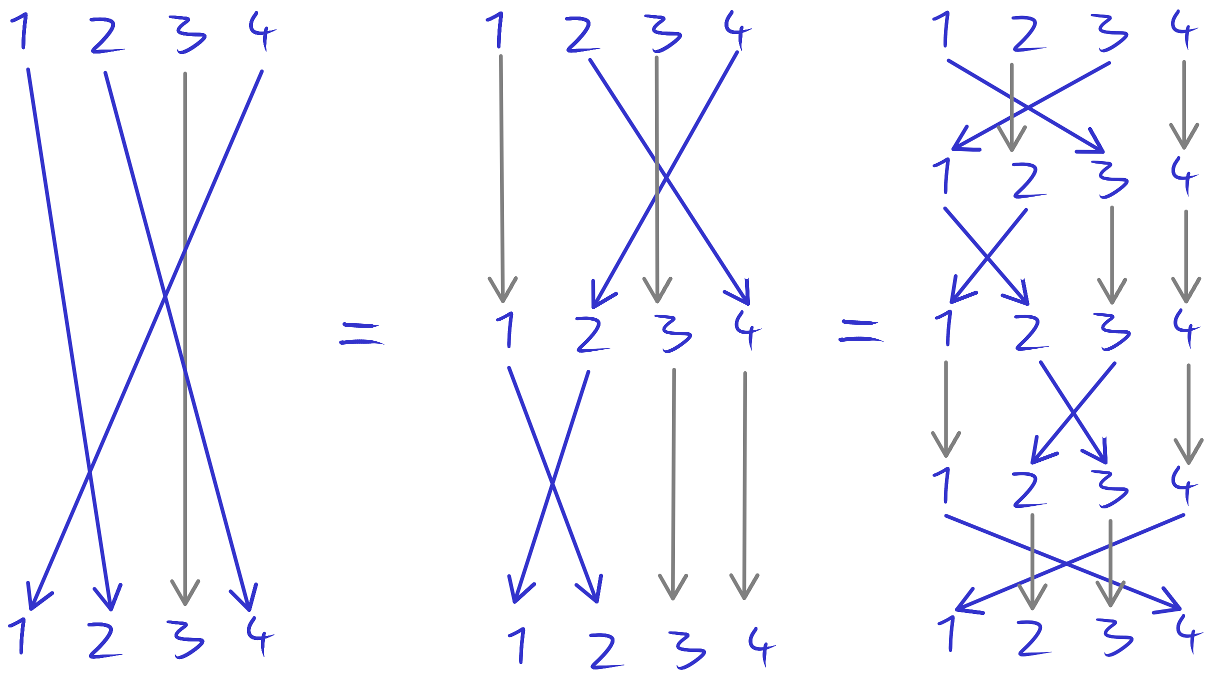
In $\mathfrak{S}_6$:

$$(3\ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

In $\mathfrak{S}_4$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 2) \circ (2\ 4)$$

$$= (1\,4) \circ (2\,3) \circ (1\,2) \circ (1\,3)$$



z.B. in S_6:

$$(2\ 6\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

z.B. in S_9:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 6 & 5 & 9 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$= (1\ 3\ 6) \circ (4\ 5\ 9\ 7)$$

$$= \underbrace{(4\ 5\ 9\ 7)}_{l_1 = 4} \circ \underbrace{(1\ 3\ 6)}_{l_2 = 3}$$

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^3 \cdot (-1)^2 = -1$$

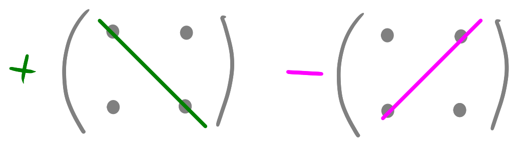
Beispiel:

(i) $\det(a_{11}) = a_{11}$

$$S_1 = \{id\}$$

ii) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

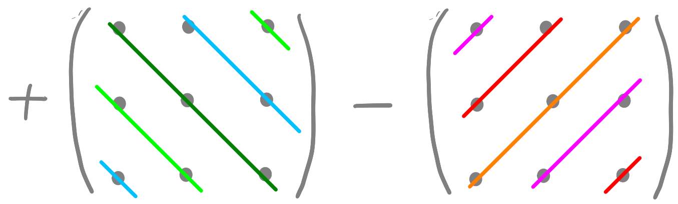
$$S_2 = \{ \overset{+}{id}, \overset{-}{(1\,2)} \}$$



iii) $$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$S_3 = \{ \overset{+}{\mathrm{id}},\ \overset{+}{(1\ 2\ 3)},\ \overset{+}{(1\ 3\ 2)},\ \underset{-}{(1\ 2)},\ \underset{-}{(1\ 3)},\ \underset{-}{(2\ 3)} \}$$



iv) $$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{23} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

(v) [4.1.3 D8]

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & & & \text{beliebig} \\ & a_{22} & & \\ & & a_{33} & \\ & 0 & & \ddots \\ & & & & a_{nn} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$$

(Für jedes $\sigma \in S_n \setminus \{\mathrm{id}\}$ gibt es i mit $\sigma(i) < i$.

Für dieses i ist $a_{i\sigma(i)} = 0$.
Also fällt der σ-Summand in der Leibnizformel weg.)

<u>Beweis</u>:

Sei $f: M(n \times n; K) \to K$ beliebige Abbildung, die (D1) & (D2) erfüllt. Da sich σ in Transpositionen zerlegen lässt $(\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m)$ und da dann

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \operatorname{sign}(\tau_1) \cdot \ldots \cdot \operatorname{sign}(\tau_m)$$

reicht es, den Fall $n = 2$ $\sigma = (1\ 2)$:

Zu zeigen ist in diesem Fall:

$$f\begin{pmatrix} {}^t\underline{a}_2 \\ {}^t\underline{a}_1 \end{pmatrix} = -f\begin{pmatrix} {}^t\underline{a}_1 \\ {}^t\underline{a}_2 \end{pmatrix}$$

Das folgt aus:

$$\cancel{f\begin{pmatrix} {}^t a_1 + {}^t a_2 \\ {}^t a_1 + {}^t a_2 \end{pmatrix}} = 0 \quad (D2)$$

$$\Vert \quad D1 \; (2.\ \text{Zeile})$$

$$f\begin{pmatrix} {}^t a_1 + {}^t a_2 \\ {}^t a_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} {}^t a_1 + {}^t a_2 \\ {}^t a_2 \end{pmatrix}$$

$$\Vert \quad D1 \; (1.\ \text{Zeile})$$

$$\underbrace{\cancel{f\begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_1 \end{pmatrix}}}_{=0} + f\begin{pmatrix} {}^t a_2 \\ {}^t a_1 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ {}^t a_2 \end{pmatrix} + \underbrace{\cancel{f\begin{pmatrix} {}^t a_2 \\ {}^t a_2 \end{pmatrix}}}_{=0}$$