Determinante

von $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n; K)$:

$$\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \underbrace{\operatorname{sign}(\sigma)}_{\text{Signum}} \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$$

S_n: symmetrische Gruppe

$$S_n := \left(\left\{ \{1,\dots,n\} \xrightarrow{\sigma} \{1,\dots,n\} \;\middle|\; \sigma \text{ bijektiv} \right\}, \circ \right)$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Fehlstand von $\sigma \in S_n$:

$\{i,j\} \subset \{1,\dots,n\}$ mit $(i<j$ und $\sigma(i) > \sigma(j))$

Signum:

$$\operatorname{sign}(\sigma) := (-1)^{\text{Anzahl der Fehlstände von } \sigma} \in \{\pm 1\}$$

Satz: (4.2.3) $\operatorname{sign}: S_n \longrightarrow (\{\pm 1\}, \cdot)$ ist ein Gruppenhomomorphismus.

$$\operatorname{sign}(\tau \circ \sigma) = \operatorname{sign}(\tau) \cdot \operatorname{sign}(\sigma)$$

Wie berechnet man $\operatorname{sign}(\sigma)$?

(a) mit Definition (Fehlstände / Kreuzungsp.)

(b) mit obigem Satz und Zerlegung in Transpositionen.

<u>Transposition</u> := Permutation der Form

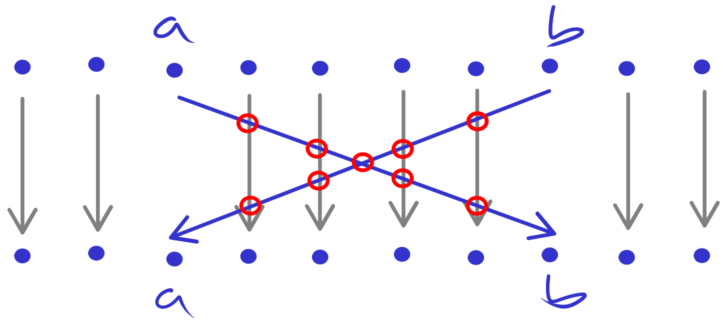
$$(a\ b) := \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & x \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ b & a & x \end{array} \right.$$

für $x \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{a, b\}$

Jede Permutation lässt sich (auf viele verschiedene Weisen) zerlegen in eine Komposition von Transpositionen.

Es ist stets

$$\mathrm{sign}(a\ b) = -1$$



Für $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_m$

Transpositionen

folgt also:

$$\mathrm{sign}(\sigma) = (-1)^{m}$$

(c) mit obigem Satz und Zykelzerlegung:

Zykel der Länge ℓ:

Permutation der Form

$$(a_1\ a_2\ \dots\ a_\ell) := \begin{cases} a_i \mapsto a_{i+1} & \text{für } i \in \{1,\dots,\ell-1\} \\ a_\ell \mapsto a_1 & \\ x \mapsto x & \text{für } x \in \{1,\dots,n\} \setminus \{a_1,\dots,a_\ell\} \end{cases}$$

Jede Permutation σ lässt sich zerlegen in eine Komposition disjunkter Zykel

$$\sigma = \left(a_1^{(1)} \dots a_{\ell_1}^{(1)}\right) \circ \dots \circ \left(a_1^{(m)} \dots a_{\ell_m}^{(m)}\right)$$

mit

$$\left\{a_1^{(i)} \dots a_{\ell_i}^{(i)}\right\} \cap \left\{a_1^{(j)} \dots a_{\ell_j}^{(j)}\right\} = \emptyset \quad \text{für } i \neq j$$

(Diese Zykelzerlegung ist sogar bis auf Reihenfolge der Zykel eindeutig.)

Für einen Zykel der Länge ℓ ist

$$\operatorname{sign}(a_1 \circ\circ\circ a_\ell) = (-1)^{\ell-1}$$

(denn

$$(a_1, \circ\circ\circ, a_\ell) = (a_1 a_2) \circ (a_1 a_3) \circ \dots \circ (a_1 a_\ell))$$

Also folgt für eine Zerlegung

$$\sigma = (a_1^{(1)} \circ\circ\circ a_{\ell_1}^{(1)}) \circ \text{--------} \circ (a_1^{(m)} \circ\circ\circ a_{\ell_m}^{(m)}):$$

$$\operatorname{sign}(\sigma) = (-1)^{(\ell_1 - 1) + \dots + (\ell_m - 1)}$$

Def: **Determinante**

von $A = (a_{ij})_{i,j} \in M(n \times n; K)$:

$$\boxed{\det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}}$$

(Leibnizformel 4.2.5)

Satz (Charakterisierung der Determinante) [4.1.2]

Die Determinante ist die einzige Abbildung

$$M(n \times n; K) \longrightarrow K,$$

die

(D1) multilinear in den Zeilen,

(D2) alternierend, und

(D3) normiert ist in dem Sinne, dass $\det(E_n) = 1$.

D1 heißt:

Wenn wir alle Zeilen außer der j-ten Zeilen fixieren, ist

$$K^n \longrightarrow K$$

$$\underline{a} \longmapsto \det \begin{pmatrix} {}^t\underline{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\underline{a} \\ \vdots \\ {}^t\underline{a}_n \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Zeile}$$

linear (für jedes $j \in \{1, \dots, n\}$)

D2 heißt:

Sind zwei Zeilen gleich ($\underline{a}_j = \underline{a}_k$ für ein $j \neq k$), so ist

$$\det \begin{pmatrix} {}^t\underline{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\underline{a}_n \end{pmatrix} = 0$$

Notiz: Aus D1 & D2 folgt für $\sigma \in S_n$:

$$\det \begin{pmatrix} {}^t\underline{a}_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ {}^t\underline{a}_{\sigma(n)} \end{pmatrix} = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \det \begin{pmatrix} {}^t\underline{a}_1 \\ \vdots \\ {}^t\underline{a}_n \end{pmatrix}$$